Lösung - Serie 6

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Stimmt diese Überlegung?

(a) Ja.

(b) Nein, da das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(c) Nein, da Zähler und Nenner des ersten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

√ (d) Nein, da Zähler und Nenner des zweiten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

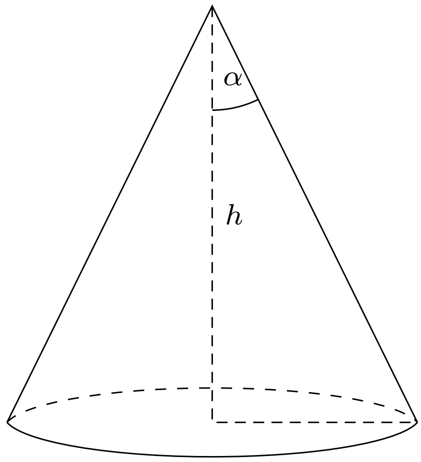
(e) Nein, da die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

Die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 (oder beide gegen ∞, s. später in der Vorlesung) streben. Für $x = 1$ gilt $x^3+x-2 = 0$ und $x^2-3x+2 = 0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \frac{3+1}{2-3} = -4.$$

Bitte wenden!

2. (★★) In einem geraden Kreiskegel sei die Höhe h genau bekannt. Der halbe Öffnungswinkel α wird gemessen, wobei der Messfehler $\Delta\alpha$ ist. Wie wirkt sich dieser Messfehler bei Berechnung des Volumens $V(\alpha)$ des Kegels aus?



(a) Der absolute Fehler $V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)$ ist proportional zu $\tan(\alpha)\Delta\alpha$.

√ (b) Der absolute Fehler $V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)$ ist proportional zu $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha$.

(c) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ hängt von h ab.

√ (d) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ ist proportional zu $\frac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$.

Lösung: Die Gleichung für das Volumen eines geraden Kegels lautet wie folgt

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot h.$$

Die Grundfläche ist ein Kreis mit Radius $\tan(\alpha)h$ und hat somit Flächeninhalt $\pi(\tan(\alpha)h)^2$. Deshalb gilt

$$V = V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\tan(\alpha)^2 h^3.$$

Wir berechnen mittels der Kettenregel

$$V'(\alpha) = \frac{\pi h^3}{3} 2\tan(\alpha)\tan(\alpha)' = \frac{\pi h^3}{3} 2\tan(\alpha)\frac{1}{\cos(\alpha)^2} = \frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$V(\alpha+\Delta\alpha) \approx V'(\alpha)\Delta\alpha + V(\alpha),$$

also gilt für den absoluten Fehler

$$V(\alpha+\Delta\alpha) - V(\alpha) \approx \frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha.$$

Siehe nächstes Blatt!

Für den relativen Fehler gilt

$$\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)} \approx \frac{\frac{2\pi h^3}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha}{\frac{\pi}{3}\tan(\alpha)^2 h^3} = \frac{2}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\Delta\alpha = \frac{4}{\sin(2\alpha)}\Delta\alpha.$$

3. (★½) Die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

√ (c) $f'(x) = (1+\ln x)x^x$.

(d) $f'(x) = x + x\ln x$.

Es gilt $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x\ln x)' e^{x\ln x} = \left(\frac{x}{x} + \ln x\right) e^{x\ln x} = (1+\ln x)x^x.$$

4. (★★) Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist *richtig*?

√ (a) Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

√ (b) Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

√ (c) Ist $f' > 0$ auf (a,b), so ist f streng monoton wachsend.

(d) Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf (a,b).

Die Aussage (a) folgt aus der Definition der Ableitung. Die Aussagen (b) und (c) folgen aus dem Mittelwertsatz. Aber (d) ist falsch: Ist f streng monoton fallend, so folgt zwar $f' \leq 0$ auf (a,b), aber f' kann in isolierten Punkten verschwinden. Beispiel: $f(x) = -x^3$.

5. (★★) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es seien $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

(a) f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(b) f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

√ (c) f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(d) f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a,b]$.

Nach dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f'. Daher hat f' mindestens zwei Nullstellen. Im Fall $f(x) = 0$ ist auch f' identisch gleich 0; also sind (a) und (b) falsch. Ein Beispiel wie $f(x) = x^3 - 3x$ mit $f'(x) = 3(x^2-1)$ zeigt, dass die Anzahl der Nullstellen von f' gleich 2 sein kann. Also ist (c) die einzig richtige Antwort.

Bitte wenden!

6. (★★½) Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\tan x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-\cos(x)\right)^2}{x\cos(x)-\sin(x)}$.

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{\tan x} \overset{\text{B-H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x+\sin x}{1+\tan^2 x} = 1$

b) Man bemerke zunächst, dass $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\arctan t}{t} \overset{\text{B-H}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{1+t^2} = 1$. Somit haben wir also

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{1+x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)^2}{x\cos x-\sin x} &\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{-2}{\cos^3 x}(-\sin x)+\sin x\right)}{\cos x - x\sin x-\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)}{x} \\
&\overset{\text{B-H}}{=} \lim_{x\to 0} -2\left(\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\sin x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)+\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{6\sin x}{\cos^4 x}\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

7. (★★) Es sei x eine kleine Grösse. Finden Sie *lineare Näherungen* (d.h. die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0) für die folgenden Ausdrücke:

a) $f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - 1$

b) $f_2(x) = e^{1+x}$

c) $f_3(x) = (1000-x)^{\frac{1}{3}}$

d)* $f_4(x) = \prod\limits_{k=0}^{364} \left(1-\frac{kx}{365}\right)$.

Lösung: Die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0 is gegeben durch $x \mapsto xf'(0)+f(0)$. Wir müssen also in jeder Teilaufgabe den Term $f'(0)$ und den Term $f(0)$ berechnen.

a) Wir berechnen

$$\left(\frac{1}{(1+x)^2}-1\right)' = -\frac{2}{(x+1)^3},$$

und deshalb gilt

$$\frac{1}{(1+x)^2}-1 \approx -2x.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Beachte
$$\left(e^{1+x}\right)' = e^{1+x}$$
und deshalb
$$e^{1+x} \approx ex + e.$$

c) Weil
$$\left((1000-x)^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3(1000-x)^{2/3}}$$
erhalten wir
$$(1000-x)^{\frac{1}{3}} \approx -\frac{x}{300} + 10.$$

d) Diese Aufgabe lässt sich am einfachsten mit der verallgemeinerten Produktregel lösen. Die verallgemeinerte Produktregel lauetet wie folgt:
$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdots u_{i-1} u_i' u_{i+1} \cdots u_n.$$
Falls also z.B. $n = 3$, dann gilt
$$(u_1 u_2 u_3)' = u_1' u_2 u_3 + u_1 u_2' u_3 + u_1 u_2 u_3'.$$
Wir berechnen also
$$\left(\prod_{k=0}^{364}\left(1 - \frac{kx}{365}\right)\right)' = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364}\left(1 - \frac{\ell x}{365}\right).$$
Wenn wir $x = 0$ setzen dann erhalten wir
$$\sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364}\left(1 - \frac{\ell \cdot 0}{365}\right) = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0,\ell\neq k}^{364} 1 = -\frac{1}{365}\sum_{k=0}^{364} k.$$
Die Gauss'sche Summenformel (welche in der Schnellübung 1, Aufgabe 2 hergeleitet wurde) sagt uns
$$\sum_{k=0}^{364} k = \frac{365 \cdot 364}{2}.$$
Wenn man alles zusammenfasst, erhält man folgende Näherung
$$\prod_{k=0}^{364}\left(1 - \frac{kx}{365}\right) \approx -182x + 1.$$

8. (★★) Die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse m_0 mit Zerfallsrate α. Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross α für ein neues, unbekanntes Material ist.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach 10 Sekunden mit einem Messfehler von $\leq$ 0,1 Sekunden, also
$$m(10 + \Delta t) = 1, \qquad |\Delta t| \leq 0.1$$

a) Bestimmen Sie die maximal und minimal möglichen α.

Bitte wenden!

b) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $\Delta\alpha$ *ungefähr* proportional zu Δt und zu $\frac{1}{t^2}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass der relative Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ *ungefähr* proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.

d) Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion und vergleichen Sie das Resultat mit den echten Fehlern. Was stellen Sie fest?

Lösung:

a) Es gilt $1 = m(10) = m_0 e^{-t\cdot\alpha(t)}$, wobei $t = 10 + \Delta t$ der Zeitpunkt ist, zu dem die Masse unter 1 Gramm fällt. Wir lösen nach $\alpha(t)$:

$$\frac{1}{m_0} = e^{-t\cdot\alpha(t)} \Leftrightarrow -t\cdot\alpha(t) = \ln\left(\frac{1}{m_0}\right) \Leftrightarrow \alpha(t) = \frac{1}{t}\ln(m_0) = \frac{1}{10+\Delta t}\cdot\ln(m_0)$$

Also ist $\alpha(t)$ in Abhängigkeit von Δt strikt monoton fallend. Somit wird das Minimum von $\alpha(t)$ bei $\Delta t = \frac{1}{10}$ und das Maximum bei $\Delta t = -\frac{1}{10}$ erreicht. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\alpha_{\min} = \alpha\left(10+\frac{1}{10}\right) = \frac{10}{101}\ln(1024) \approx 0{,}686 \qquad \text{und}$$
$$\alpha_{\max} = \alpha\left(10-\frac{1}{10}\right) = \frac{10}{99}\ln(1024) \approx 0{,}700.$$

b) Aus Teilaufgabe **a)** wissen wir, dass $\alpha(t) = \ln(m_0)\frac{1}{t}$. Daraus folgt,

$$\begin{aligned}\Delta\alpha = \alpha(t+\Delta t) - \alpha(t) &= \ln(m_0)\frac{1}{t+\Delta t} - \ln(m_0)\frac{1}{t}\\ &= -\ln(m_0)\frac{\Delta t}{t(t+\Delta t)}.\end{aligned}$$

Da $t + \Delta t \approx t$, folgen die beide Proportionen.

c) Aus Teilaufgabe **b)** haben wir $\Delta\alpha = -\alpha\frac{\Delta t}{t+\Delta t}$. Nochmals mit $t + \Delta t \approx t$ erhalten wir

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx -\frac{\Delta t}{t}.$$

d) Durch die lineare Ersatzfunktion erhalten wir

$$d\alpha = \alpha' dt = -\alpha\frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dt}{t}.$$

So die Ausdrücke sind gleich, wenn man $dt = \Delta t$ und $t + \Delta t \approx t$ annimmt. Der relative Messfehler in der Zeitmessung schlägt sich linear im relativen Messfehler der Zerfallsrate nieder.

9. (★★½)

a) Es sei eine stetige, in (a,b) differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

Siehe nächstes Blatt!

b) Beweisen Sie mittels Teilaufgabe (a) die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

c)* Wenn die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwar *stetig, aber nicht differenzierbar ist*, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges f an, so dass der Mittelwertsatz nicht gilt.

Lösung:

a) Wenn f konstant ist, dann ist natürlich $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Für die umgekehrte Implikation nehme man $x_1, x_2 \in [a, b]$, wobei o.B.d.A. $x_1 < x_2$. Die Einschränkung $f|_{(x_1,x_2)}$ ist differenzierbar. Der Mittelwertsatz garantiert die Existenz eines $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

ist, aber laut unserer Annahme ist $f'(\xi) = 0$ und deshalb ist $f(x_1) = f(x_2)$. Dies heisst, dass f konstant ist.

b) Man definiere

$$f : x \longmapsto \arcsin x + \arccos x,$$

mit $D(f) = [-1, 1]$. Die Funktion f ist stetig und in $(-1, 1)$ differenzierbar, mit

$$f'(x) = \arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Teilaufgabe (a) zeigt, dass f konstant ist. Somit ist für alle $x \in [-1, 1]$ z.B.

$$\arcsin x + \arccos x = f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

c)* Wir wählen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & x \leq c, \\ b - x, & x > c, \end{cases}$$

wobei $c := \frac{a+b}{2}$ den Mittelpunkt des Intervalls $[a, b]$ bezeichnet. Diese Funktion ist auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetig und lediglich an der Stelle c nicht differenzierbar, da sie dort einen Knick hat. Links vom Knick beträgt die Ableitung $+1$, rechts davon -1. Die Sekantensteigung lautet aber

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0 \neq \pm 1$$

und deshalb gilt der Mittelwertsatz nicht. Eine Skizze der Funktion und der Sekante ist auf dieser Seite am oberen Ende.

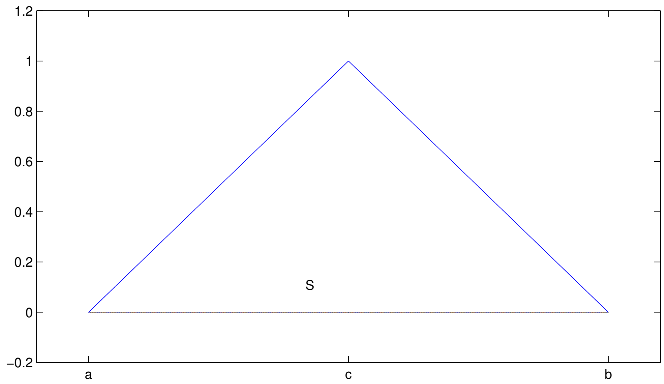


Abbildung 1: Die Funktion aus Aufgabe 9(c) (blau) und die zugehörige Sekante (schwarz).