# Lösung - Serie 8

**MC-Aufgaben (Online-Abgabe)**

**1.** (★⯨) Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1-t^2) \\ \cos(1-t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

√ (a) Ein Kreis.

Es gilt

$$x^2(t) + y^2(t) = \sin^2(1-t^2) + \cos^2(1-t^2) = 1,$$

was der Kreisgleichung des Einheitskreises entspricht. Der Term $1 - t^2$ nimmt auch alle Werte in $[-2\pi, 0]$ an für $t \in \mathbb{R}$, also wird der gesamte Einheitskreis gezeichnet.

(b) Eine Ellipse.

(c) Eine Parabel.

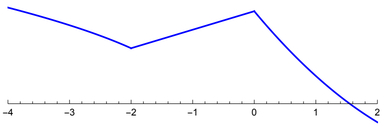
(d) Eine Gerade.

(e) Ein anderes Objekt.

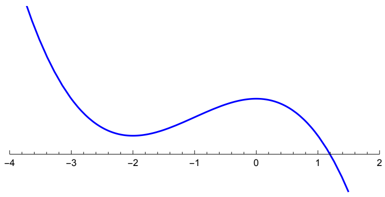
(f) Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

**2.** (★⯪) Gegeben sind die folgende Funktionen:

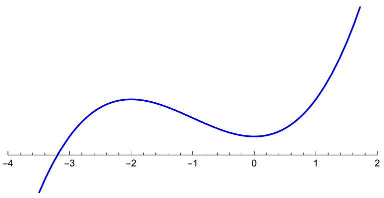
*a)*



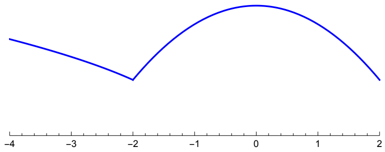

*b)*




*c)*




*d)*




Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Alle Funktionen a)-d) sind differenzierbar.

√ (b) Falls die zweite Ableitung der Funktionen b) und c) existiert, dann hat sie jeweils mindestens eine Nullstelle.

(c) Jede der Funktionen a)-d) hat eine Stelle mit Ableitung = 0.

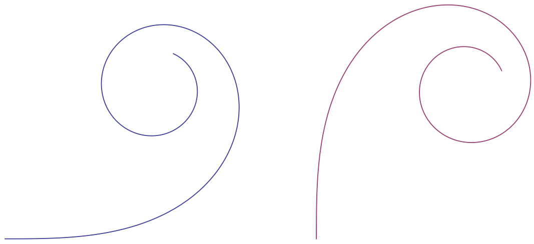
(d) Die Funktion c) ist konvex.

Die Funktionen a) und d) sind nicht differenzierbar, weil der Graph einen Knick hat. Weiter haben die Graphen in b) und c) jeweils bei $-2$ und $0$ ein Extremum (also eine Nullstelle der ersten Ableitung) und somit muss die zweite Ableitung eine Nullstelle haben (gemäss dem Mittelwertsatz).

Die Funktion a) ist an den Stellen $-2$ und $0$ nicht differenzierbar und auf den Segmenten zwischen diesen Stellen ist die Funktion abwechselnd strikt monoton steigend oder strikt monoton fallend. Deshalb hat die Ableitung bei a) keine Nullstellen (weil strikt monoton bedeutet entweder $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$). Der Graph von c) ist nicht konvex, da beispielsweise die Sekante von $-3$ zu $1$ den Graph schneidet.

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** (★✭) Gegeben sind die Kurven $K_1$ (links) und $K_2$ (rechts), die beide für wachsenden Parameter $t$ von aussen nach innen durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?



√ (a) $k_1$ ist positiv

√ (b) $k_2$ ist negativ

√ (c) $t \to k_1(t)$ ist monoton wachsend

√ (d) $t \to k_2(t)$ ist monoton fallend

Die erste Kurve krümmt sich nach links, also ist $k_1$ positiv. Analog krümmt sich die zweite Kurve nach rechts, also ist $k_2$ negativ. Die Krümmungskreis wird bei beiden Kurven kleiner, d.h. der Krümmungsradius $1/|k|$ wird beidesmal kleiner. Das heisst, beide Krümmungen $k_1$ und $k_2$ sind im Absolutbetrag monoton wachsend. Da $k_2$ negativ ist, muss dieses monoton fallend sein.

**Bitte wenden!**

**4.** (★★) Beschreiben Sie die Bewegung eines Punktes mit der Parametrisierung

$$[0, \tfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin 6t \\ \cos 6t \end{pmatrix}.$$

(a) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(0, 1)$.

(b) Ellipse mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, vom Punkt $(0, 1)$ nach $(1, 0)$.

(c) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

(d) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn.

√ (e) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

Wir sehen, dass die Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sin 6t \\ 2\cos 6t \end{pmatrix}$ die Kreisgleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 2^2$$

eines Kreises mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2 erfüllt. Wenn wir den Startpunkt ausrechnen $(t = 0)$, sehen wir, dass

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn $t$ etwas grösser als Null wird, wird die $x$-Koordinate zunächst kleiner (wegen des negativen Vorzeichens vor dem Sinus) und die $y$-Koordinate wird ebenfalls kleiner. Wir durchlaufen den also Kreis im Gegenuhrzeigersinn.

Die Parametrisierung $(\sin t, \cos t)$ des Einheitskreises durchläuft für $t \in [0, 2\pi]$ den Kreis genau einmal, also durchläuft unsere Parametrisierung den Kreis für $t \in [0, \frac{2\pi}{6}]$ auch genau einmal.

**Siehe nächstes Blatt!**

**5.** (★★) Die beiden in Polarkoordinaten $(r, \phi)$ gegebenen Kurven

$$\begin{array}{lcll} K_1 & : & r & = & \sin^2\phi \\ K_2 & : & r & = & \frac{1}{2}|\sin(2\phi)| \end{array}$$

schneiden sich für $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ in einem Punkt $P$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $t_1$ im Punkt $P$ an die Kurve $K_1$. Welcher der folgenden Punkte liegt nicht auf $t_1$?

(a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(b) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}\right)$

(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $\left(1, \frac{6-\sqrt{2}}{2}\right)$

√ (e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Berechnung des Schnittpunktes der Kurven $K_1$ und $K_2$: es ist die Gleichung

$$\sin^2\phi = \frac{1}{2}|\sin(2\phi)| \qquad (1)$$

mit $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zu Lösen. Für $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $\sin(2\phi) > 0$. Aus (1) erhalten wir $\sin^2\phi = \frac{1}{2}\sin(2\phi) = \sin\phi\cos\phi$, also $\sin\phi = \cos\phi$ (da $\sin\phi > 0$ für $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). Also

$$\phi = \frac{\pi}{4} =: \phi_0$$

Die Parameterdarstellung $r_1$ der Kurve $K_1$ ist:

$$r_1(\phi) = \begin{pmatrix} \sin^2\phi\cos\phi \\ \sin^2\phi\sin\phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\text{und } \dot{r_1}(\phi) = \begin{pmatrix} 2\sin\phi\cos^2\phi - \sin^2\phi\sin\phi \\ 3\sin^2\phi\cos\phi \end{pmatrix}\right)$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist somit

$$P := r_1(\phi_0) = \left(\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}, \sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad .$$

Die Parameterdarstellung der Tangente $t_1$ an die Kurve $K_1$ im Punkt $P$ ist somit:

$$t \mapsto r_1(\phi_0) + t\dot{r}_1(\phi_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ 3\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Die Parameterdarstellung von $t_1$ lässt sich auch schreiben als

$$\begin{array}{ll} (I) & x = \frac{\sqrt{2}}{4} + t\frac{\sqrt{2}}{4} \\ (II) & y = \frac{\sqrt{2}}{4} + t\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

Wir eliminieren den Parameter $t$ aus den Gleichungen (Berechne $3\cdot(I) - (II)$):

$$3x - y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es lässt sich nun leicht nachprüfen, dass $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ die Gleichung nicht erfüllt und somit nicht auf $t_1$ liegt.

**Bitte wenden!**

**6.** (★★) Gegeben sei die reelle Funktion

$$f\colon x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

**a)** Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von $f$.

**b)** Wo ist $f$ monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f$, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt $f$ globale Extrema?

**c)** Bestimmen Sie den Wertebereich von $f$.

**d)** Wo ist $f$ konvex? Wo ist $f$ konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von $f$.

**e)** Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von $f$.

***Lösung:***

**a)** Die Funktion $f(x) = x^{3/2}(x-2)^3$ ist nur für negative Werte von $x$ nicht definiert. Folglich ist der Definitionsbereich von $f$ das Intervall $[0, \infty)$.

Da $f(x) = 0$ nur dann gilt, wenn entweder $x^{3/2} = 0$ oder $(x-2)^3 = 0$ gilt, sind die Nullstellen von $f$ gleich $x = 0$ und $x = 2$.

**b)** Die Ableitung von $f$ ist durch folgende Formel für all $x \in (0, \infty)$ gegeben:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^3 + 3x^{3/2}(x-2)^2 = \frac{3}{2}x^{1/2}(x-2)^2(3x-2).$$

Folglich sind die Nullstellen von $f'$ im Intervall $(0, \infty)$ durch $x = 2$ und $x = 2/3$ gegeben. Es ist leicht zu überprüfen, dass $f'(x) < 0$ für $x \in (0, 2/3)$, $f'(x) > 0$ für $x \in (2/3, 2)$ und $f'(x) > 0$ für $x > 2$ gilt. Demnach ist $f$ im Intervall $(0, 2/3)$ streng monoton fallend und im Intervall $(2/3, \infty)$ monoton steigend.

Dadurch ergibt sich, dass die einzige lokale Minimalstelle von $f$ an der Stelle $x = 2/3$ zu finden ist, und dass $x = 2/3$ auch eine globale Minimalstelle ist. Überdies folgt aus der oben bewiesenen Monotonie, dass die einzige lokale Maximalstelle von $f$ bei $x = 0$ liegt (obwohl $f'(2) = 0$).

**c)** Wie schon in b) argumentiert, hat $f$ eine globale Minimalstelle bei $x = 2/3$ und eine lokale Maximalstelle bei $x = 0$. Ausserdem erkennt man leicht, dass $f(x) \to \infty$ wenn $x \to \infty$ und dass $f$ im Definitionsbereich stetig ist. Folglich ist $x = 0$ keine globale Maximalstelle und der Wertebereich von $f$ genau das Intervall $[f(2/3), \infty)$, welches gleich

$$\left[-\frac{(2/3)^{3/2}4^3}{3^3}, \infty\right)$$

ist.

**d)** Die zweite Ableitung von $f$ ist durch

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 3(x-2)x^{1/2}(3x-2) + \frac{3(x-2)^2(3x-2)}{4x^{1/2}} + \frac{9}{2}(x-2)^2x^{1/2} \\
&= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(4x(3x-2) + (x-2)(3x-2) + 6(x-2)x\right) \\
&= \frac{3(x-2)}{4x^{1/2}}\left(21x^2 - 28x + 4\right)
\end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

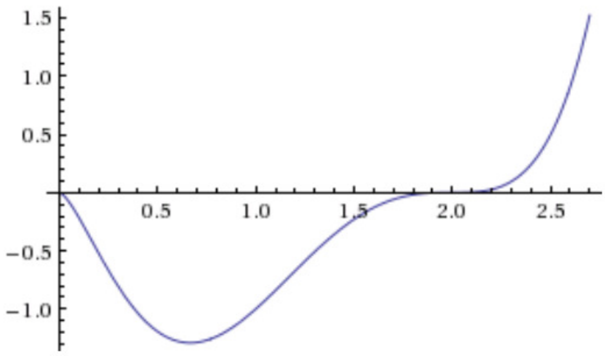
für alle $x \in (0, \infty)$ gegeben. Also ist $f''(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 2$ oder $21x^2 - 28x + 4 = 0$ gilt. Unter Zuhilfenahme der quadratischen Lösungsformel folgt, dass die Nullstellen von $f''$ durch $x = 2$, $x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 0.163$ und $x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \approx 1.171$ gegeben; dies sind die möglichen Wendepunkte von $f$. Eine kurze Rechnung zeigt, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) > 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right)$, dass $f''(x) < 0$ für $x \in \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right)$ und dass $f''(x) > 0$ für $x \in (2, \infty)$ gilt. Folglich ist $f$ strikt konvex auf

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup (2, \infty)$$

und strikt konkav auf

$$\left(0, \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt{7}}\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{7}}, 2\right).$$

**e)** Der Graph von $f$ ist



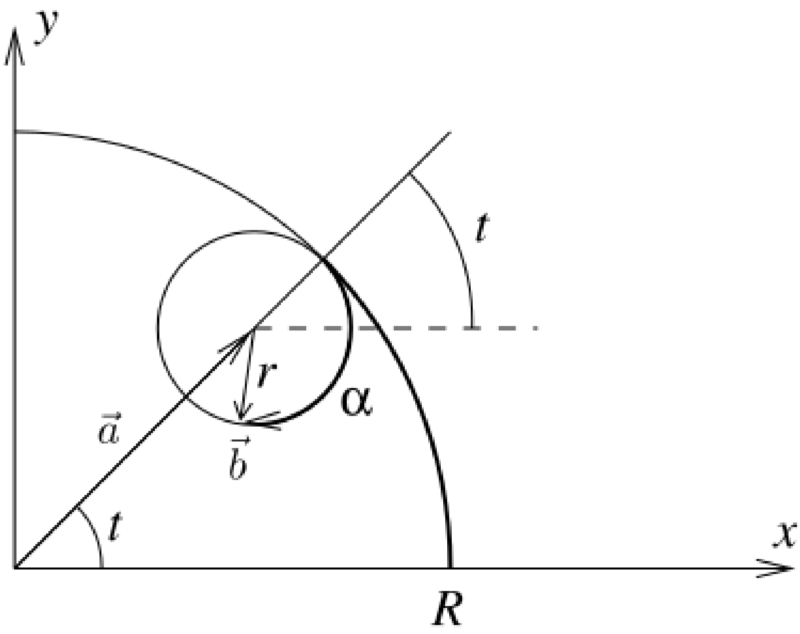

**7.** (★★★) Ein Kreis vom Radius $r$ rollt im Innern eines Kreises vom Radius $R$ ab ($r < R$). Die Kurve, die dabei ein fester Punkt $P$ der Peripherie des kleinen Kreises beschreibt, heisst *Hypozykloide*. Bestimmen Sie für den Fall $R = 4r$ eine Parameterdarstellung sowie eine implizite Darstellung der Kurve und skizzieren Sie diese.

***Lösung:***

Die Parametrisierung einer Hypozykloide finden wir folgendermassen: Zunächst finden wir eine Parametrisierung $\vec{a}(t)$ des Mittelpunktes $M$ des kleinen Kreises und überlegen uns danach, welcher Vektor $\vec{b}(t)$ zwischen $M$ und $P$ liegt. Daraus erhalten wir die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{a}(t) + \vec{b}(t).$$

Wir legen fest, dass der kleine Kreis im Gegenuhrzeigersinn abrollt und mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir den Winkel (im Bogenmass), welcher $M$ bereits zurückgelegt hat. Für $t = 0$ nehmen wir weiter an, dass $P$ auf der $x$-Achse liegt.




Es ist klar, dass sich $M$ auf einem Kreis mit Radius $R - r$ im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Es gilt also

$$\vec{a}(t) = (R - r)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Aus der Geometrie des Problems ist klar, dass der (variable) Berührpunkt der beiden Kreise beim Winkel $t$ eine Distanz von $Rt$ zurückgelegt hat. Alle Punkte auf dem kleinen Kreis bewegen sich also relativ zu diesem Berührpunkt ebenfalls um diese Distanz im Uhrzeigersinn, also gilt für den Winkel $\alpha(t)$ zwischen $P$ und dem (variablen) Berührpunkt

$$r\alpha(t) = Rt \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha(t) = \frac{Rt}{r}.$$

Um $\vec{b}(t)$ zu bestimmen, sind wir jedoch nicht an $\alpha(t)$ interessiert, sondern am Winkel zwischen $\vec{b}(t)$ und der Horizontalen. Wie wir aus der Skizze sehen, ist dieser Winkel gleich

$$\alpha(t) - t = \frac{Rt}{r} - t = \frac{Rt - rt}{r} = \frac{R-r}{r}\,t,$$

es ergibt sich also

$$\vec{b}(t) = r\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)\\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)\end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \vec{a}(t) + \vec{b}(t) = (R-r)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)\\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)\end{pmatrix}.$$

Mit $r = \frac{R}{4}$ folgt:

$$x(t) = \frac{R}{4}(3\cos(t) + \cos(3t)) = R\cos^3(t)$$
$$y(t) = \frac{R}{4}(3\sin(t) - \sin(3t)) = R\sin^3(t),$$

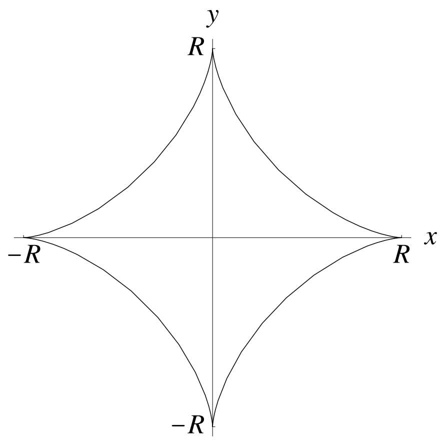
wobei wir benutzt haben, dass $\cos^3(t) = \frac{1}{4}(3\cos(t) + \cos(3t))$ und $\sin^3(t) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))$ (siehe Serie 4 Aufgabe 7).

**Siehe nächstes Blatt!**

Aus der Identität $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ erhalten wir die implizite Darstellung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Es ist eine Asteroide mit vier Spitzen: $x$- und $y$-Achse sind dort Tangenten.




**8.** (★★★) Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve $C$ gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $-\infty < t < -1$ und $-1 < t < +\infty$.

**a)** Bestimmen Sie die Gleichung, d.h. eine implizite Darstellung, von $C$.
*Hinweis:* Was ist $\frac{y}{x}$?

**b)** Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $C$ mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.

**c)** In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen?

***Lösung:***

**a)** Für $t \neq 0$ haben wir $\frac{y}{x} = t$. Einsetzen in die Gleichung für $x$ gibt:

$$x = \frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1} = \frac{yx^2}{y^3 + x^3},$$

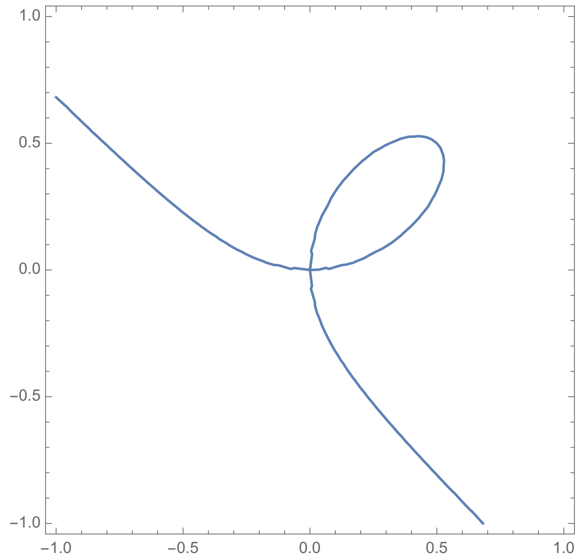
Und so,

$$y^3 + x^3 - xy = 0.$$

Falls $t = 0$, dann befindet sich die Kurve $C$ im Punkt $(0, 0)$, der die obige Gleichung auch erfüllt. Somit ist die implizite Darstellung von $C$ gegeben durch

$$y^3 + x^3 - xy = 0.$$

**Bitte wenden!**




**b)** Wir setzen $x = y$ in der impliziten Gleichung für $C$ und erhalten

$$x^3 + x^3 - x \cdot x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^3 = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \tfrac{1}{2}.$$

$(x, y) = (0, 0)$ entspricht dem Parameter $t = 0$.
$(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entspricht dem Parameter $t = \frac{1/2}{1/2} = 1$.

Die Tangentensteigung berechnet sich zu

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{2t(t^3+1)-t^2\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}}{\frac{(t^3+1)-t\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}} = \frac{2t(t^3+1) - t^2 \cdot 3t^2}{(t^3+1) - t \cdot 3t^2} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ -1, & t = 1. \end{cases}$$

Die Tangente durch $(x, y) = (0, 0)$ ist diejenige zu $t = 0$, also

$$y = 0.$$

Da die Kurve $C$ symmetrisch ist bezüglich $y = x$, hat sie eine zusätzliche Tangente bei $(0, 0)$, und zwar die $y$-Achse $x = 0$.
Die Tangente durch $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist diejenige zu $t = 1$, also

$$y = -x + q$$

für $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, d. h. $x + y - 1 = 0$.

**c)** Aus **b)** wissen wir, dass die Tangenten durch $(0, 0)$ gerade die Koordinatenachsen sind. Es gibt aber noch mehr: Wir setzen die Steigung gleich Null und erhalten

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 0 \text{ oder } t = \sqrt[3]{2}.$$

Das ergibt die Punkte $(x, y) = (0, 0)$ und $(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$, wo die Tangenten horizontal, also parallel zur $x$-Achse sind.

Da die Kurve symmetrisch ist bezüglich $y = x$, sind die Tangenten in den Punkten $(x, y) = (0, 0)$ und $(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3})$ vertikal, d. h. parallel zur $y$-Achse.

**Siehe nächstes Blatt!**

**9.** (★★½) Eine Kanonenkugel wird vom Punkt $(0,0)$ aus mit Geschwindigkeit $v$ unter einem Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der positiven $x$-Achse abgeschossen. Behandelt man die Kugel als Punktmasse und orientiert die Schwerkraft ($g = 10$) in Richtung der negativen $y$-Achse, ist die Bewegung beschrieben durch:

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos(\varphi)t \\ y(t) &= v\sin(\varphi)t - 5t^2. \end{aligned}$$

**a)** Wie muss der Winkel $\varphi$ bei vorgegebenem $v$ gewählt werden, damit die Kugel möglichst weit fliegt, bevor sie auf dem Boden (der $x$-Achse) auftrifft? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Maximum handelt!

**b)** Wo landet die Kugel bei diesem Abschusswinkel, wenn $v = 200$ ist?

**c)*** (Bonusaufgabe, Physik!) In einer Quizsendung, die im Oktober 2018 im deutschen Privatfernsehen ausgestrahlt wurde, wurde dem Kandidaten folgende Schätzfrage gestellt:

In einem Guetsli sind etwa 60 Kilojoule an chemischer Energie gespeichert. Ein Sprengmeister erzeugt aus der Guetslimasse einen Sprengstoff, der in eine Abschussvorrichtung gegeben wird, die den optimalen Abschusswinkel aufweist.

In der Leichtathletikdisziplin „Hammerwurf" wird eine an einem Stahldraht befestigte Kugel (der „Wurfhammer") möglichst weit geschleudert. Die Masse des gesamten Objekts beträgt 7,26 kg. Der seit über 30 Jahren bestehende Weltrekord liegt derzeit bei 86,74 Metern.

So ein Wurfhammer wird nun in die Abschussvorrichtung gelegt und die Sprengung gezündet. Schätzfrage: Wie weit fliegt der Wurfhammer?

Bei uns soll es jedoch ums Rechnen gehen statt ums Schätzen. Ein Teil der Energie des Guetslis wird über Wärme, Schall und Luftwiderstand abgegeben. Welcher Prozentsatz der chemischen Energie muss kinetische Energie umgewandelt werden, damit die Guetslikanone Hammerwurf-Weltrekord übertrifft?

***Lösung:***

**a)** Wir bestimmen zuerst den Landepunkt $(x(t_*), y(t_*)) = (x_*, 0)$ für $t_* > 0$ in Abhängigkeit des Abschusswinkels $\varphi$. Es gilt

$$\begin{aligned} y(t_*) = 0 &\Leftrightarrow 5t_*^2 = v\sin(\varphi)t_* \\ &\Leftrightarrow t_* = \tfrac{1}{5}v\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir die Funktion $x_*$ von $\varphi$ gegeben durch

$$x_*(\varphi) = x(t_*)(\varphi) = \tfrac{1}{5}v^2\cos\varphi\sin\varphi.$$

Um das Maximum zu bestimmen, berechnen wir die erste Ableitung nach $\varphi$.

$$\tfrac{\mathrm{d}x_*}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) = \frac{v^2}{5}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}x_*}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) = 0 &\Leftrightarrow \cos\varphi = \sin\varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Für $\varphi < \frac{\pi}{4}$ gilt $\frac{\mathrm{d}x_*}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) > 0$ und somit ist dort $x_*(\varphi)$ monoton wachsend. Andererseits ist die Ableitung für $\varphi > \frac{\pi}{4}$ negativ und folglich $x_*(\varphi)$ monoton fallend. Also handelt es sich beim Funktionswert dazwischen um ein Maximum. Alternativ berechnet man die zweite Ableitung von $x_*(\varphi)$

$$x_*''(\varphi) = -\frac{4}{5}v^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

und setzt $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ein

$$x_*''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{5}v^2 < 0.$$

Das zeigt ebenfalls, dass $x_*$ ein Maximum bei $\frac{\pi}{4}$ besitzt.

**b)** Wir berechnen

$$x_*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{200^2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{5} = 4000$$

**c)*** Aus Teil a) wissen wir, dass die optimale Wurfweite $x = \frac{v^2}{10}$ beträgt. Weiterhin gilt $E_{\text{kin}} = \eta \cdot E_{\text{chem}} = \frac{1}{2}mv^2 = 5mx$, wobei $\eta$ der Wirkungsgrad ist. Wir lösen nach $\eta$ auf und erhalten $\eta = \frac{5mx}{E_{\text{chem}}}$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\eta = \frac{5 \cdot 7{,}26 \cdot 86{,}74}{60 \cdot 10^3} \approx 0{,}052 = 5{,}2\%.$$

Die Sendung kann unter folgendem Link gefunden werden:
`https://www.prosieben.ch/tv/alle-gegen-einen/video/11-wie-weit-kann-man-einen-wurfhammer-aus-der-energie-eines-kekses-schiessen-clip`