Lösung - Serie 9

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★☆) Es sei f die Funktion $f(x) = xe^x + 7$. Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von f?

(a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$;

√ (b) $g(x) = xe^x - e^x + 7x$;

(c) $g(x) = (x-1)e^x$;

√ (d) $g(x) = (x-1)e^x + 7x + \pi^4$.

Durch partielle Integration erkennen wir, dass die Stammfunktionen von f Funktionen der Form $xe^x - e^x + 7x + C$ für eine Konstante C sind. Die Funktionen in (b) und (d) sind dieser Form, die Funktionen in (a) und (c) nicht.

2. (★★) Es seien $C, l > 0$. Die Bernoullispirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\varrho(\varphi) = Ce^{l\varphi},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

√ (a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\varphi)$ ist konstant.

Richtig. Eine Parametrisierung der Bernoullispirale (Spira mirabilis) wird durch

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi) &= Ce^{l\varphi}\cos(\varphi) \\ y(\varphi) &= Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) \end{cases}$$

gegeben, und also

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi) &= Cle^{l\varphi}\cos(\varphi) - Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) \\ y(\varphi) &= Cle^{l\varphi}\sin(\varphi) + Ce^{l\varphi}\cos(\varphi) \end{cases}$$

Der Winkel α wird nach definition des Skalarproduktes folgenderweise berechnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r}(\varphi)\cdot\dot{\vec{r}}(\varphi)}{|\vec{r}(\varphi)|\cdot|\dot{\vec{r}}(\varphi)|} = \frac{C^2le^{2l\varphi}}{\sqrt{C^2e^{2l\varphi}}\cdot\sqrt{C^2l^2e^{2l\varphi}+C^2e^{2l\varphi}}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+1}},$$

der unabhängig von φ ist.

(b) Die Differenz der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

Falsch. Sehen Sie sich bitte die Antwort c) an.

√ (c) Der Quotient der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

Richtig. Die Gleichung

$$y(\varphi) = Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) = 0,$$

hat die Lösungen $\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Die Schnittpunkte mit der positiven x-Achse sind also

$$(x(2\pi k), 0) = (Ce^{2l\pi k}, 0), k \in \mathbb{Z}.$$

Der Quotient ist also unabhängig von k und ist gleich

$$\frac{x(2\pi k)}{x(2\pi(k-1))} = \frac{Ce^{2l\pi k}\cos(2\pi k)}{Ce^{2l\pi(k-1)}\cos(2\pi(k-1))} = e^{2\pi l}.$$

(d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit $C = l = 1$ ist die Kardiode.

Falsch. Im Spezialfall $C = l = 1$ ist die Evolute der Bernoullische Spirale

$$\vec{r}(\varphi) = (e^{\varphi}\cos(\varphi), e^{\varphi}\sin(\varphi))$$

durch die Kurve

$$\vec{r}(\varphi) = (-e^{\varphi}\sin(\varphi), e^{\varphi}\cos(\varphi))$$

gegeben. Insbesondere kriegen wir diese Evolute durch einer Drehung der Spirale von $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn.

Siehe nächstes Blatt!

3. (★½) Es sei f die Funktion mit $f(x) = \int\limits_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$;

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$;

(c) $f'(x) = \cos(x)$;

√ (d) $f'(x) = \sin(x)$.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.
Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)dt = -\cos t\Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

4. (★) Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

Falsch. Dieses Integral stimmt mit $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$ überein, da nur die Integrationsvariable den Namen wechselt.

√ (b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}t$

Richtig, der Integrand ist konstant in Abhängigkeit von t.

(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$

Falsch. Es gilt

$$\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = -\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$

Falsch. Dieses Integral stimmt mit $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ überein, da nur die Integrationsvariable den Namen wechselt.

5. (★½) Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

√ (a) $x \mapsto \int_0^x t\,dt$

√ (b) $x \mapsto \int_0^x t^2\,dt$

(c) $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$

√ (d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t\,dt$

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend. Eine geometrische Begründung: Ausser bei $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0 wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

Siehe nächstes Blatt!

6. (★★½) Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma}\colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$ sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang $\vec{\gamma}$ ab.[1] Bestimmen Sie das Zentrum $\vec{z}(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto \vec{z}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung:

a) Definiert man $(x(t), y(t)) := (t, \cosh t) = \vec{\gamma}(t)$, so kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

Wir haben $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (1, \sinh t)$ und $\ddot{\vec{\gamma}}(t) = (0, \cosh t)$. Dann ist

$$k(t) = \frac{\cosh t - 0}{\left(1 + \sinh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{\left(\cosh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Der Radius r_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$ ist also

$$r_0 = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{\cosh^2(0)}\right|} = 1,$$

und sein Zentrum z_0 ist durch die folgende Formel gegeben (Evolute):

$$z_0 = \vec{\gamma}(0) + r_0 \cdot \frac{n(0)}{\|n(0)\|},$$

wobei $n : t \longmapsto n(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ der Normalenvektor ist, welcher aus einer Drehung von $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ von $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Für n gilt:

$$n(t) = (-\sinh t, 1); \quad \|n(t)\| = \sqrt{(-\sinh t)^2 + 1^2} = \cosh t.$$

Somit ist

$$z_0 = (0, 1) + 1 \cdot \frac{(-\sinh(0), 1)}{\cosh(0)} = (0, 2).$$

b) Das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Radius r_0 und Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ wird parametrisiert wie folgt:

$$\begin{aligned} z(t) &= \vec{\gamma}(t) + r_0 \cdot \frac{n(t)}{\|n(t)\|} = (t, \cosh t) + 1 \cdot \frac{(-\sinh t, 1)}{\cosh t} \\ &= \left(t - \tanh t, \cosh t + \frac{1}{\cosh t}\right). \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor dieser Kurve ist

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 t}, \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = \frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t} \cdot (1, \sinh t) \\ &= \tanh^2 t \cdot (1, \sinh t). \end{aligned}$$

Somit ist $\dot{z}(0) = \tanh^2(0) \cdot (1, \sinh(0)) = (0, 0)$.

---

[1] Falls Sie r_0 bei a) nicht berechnet haben, können Sie $r_0 = 1$ annehmen.

Bitte wenden!

7. (★★) Die Ebene Kurve K sei gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) := 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) := 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) Skizzieren Sie die Kurve anhand von Achsenabschnittspunkten, deren Tangenten, sowie Punkten, wo die Tangente horizontal oder vertikal liegt.

b) Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Kurve in folgende Geogebra-App eingeben:

`https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#material/VSBerkaq`

c) Berechnen Sie die Krümmung $k(t)$ sowie die Parametrisierung der Evolute.

d) Skizzieren Sie die Evolute anhand der in **(a)** gelisteten Eigenschaften.

e) Überprüfen Sie wiederum Ihr Resultat, indem Sie Ihr Resultat in die App aus **(b)** eingeben und mit folgendem Evolutenrechner vergleichen:

`https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#material/nbv3bk92`

Lösung:

a)
- **Schnittpunkte mit der x-Achse**: es muss $y(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ erhalten wir

$$y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow 2\sin t(1+\cos t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \text{ oder } t = \pi.$$

Die Steigung der Tangente im Punkt $(x(t), y(t))$ ist

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{\cos t + \cos 2t}{\sin t + \sin 2t}.$$

Für $t = 0$ haben wir: $x(t) = 3$ und die Steigung ist $+\infty$, das heisst: die Tangente im Punkt $(3, 0)$ ist eine vertikale Gerade.
Wir haben $x(\pi) = -1$ und für $t \to \pi$ gilt es:

$$\lim_{t\to\pi} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{t\to\pi} \frac{\sin t + 2\sin 2t}{\cos t + 2\cos 2t} = 0.$$

Also die Tangente im Punkt $(-1, 0)$ ist eine horizontale Gerade.
- **Schnittpunkte mit der y-Achse**: es muss $x(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ erhalten wir

$$x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 = 0 \quad 2u^2 + 2u - 1 = 0,$$

wobei wir die Substitution $u = \cos t$ benutzt haben. Diese Gleichung hat Lösungen $u_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Da $u = \cos t \geq -1$ und $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$, haben wir nur die Lösung $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Es gibt zwei Zahlen $t \in [0, 2\pi]$ für die $\cos(t) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Nämlich $t_1 = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ und $t_2 = 2\pi - t_1$. Es gilt:

$$y(t_1) \approx 2.55 \quad y(t_2) \approx -2.55,$$

und die Steigungen der Tangenten sind

$$\frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)} = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\dot{y}(t_2)}{\dot{x}(t_2)} = -\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} < 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

- **Punkte, wo die Tangente eine horizontale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung gleich Null ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot{y}(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 0$. Dies gilt für $t = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. Wir wissen schon, dass für $t = \pi$ die Tangente horizontal ist. Für die andere zwei Punkte gilt $\dot{x}(t) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$. Also haben wir eine horizontale Tangente in den Punkten

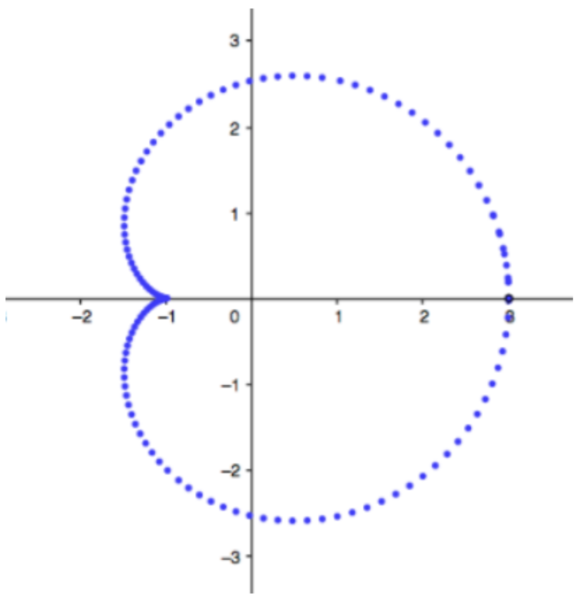
$$\begin{aligned}
&(x(\pi), y(\pi)) = (-1, 0), \\
&\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \\
&\left(x\left(\frac{5\pi}{3}\right), y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

- **Punkte, wo die Tangente eine vertikale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung $+\infty$ ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot{x}(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = 0$. Dies gilt für $t = 0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Für $t = 0$ wissen wir schon, dass die Tangente vertikal ist und für $t = \pi$, dass die Tangente horizontal ist. Es gilt $\dot{y}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \dot{y}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \infty$. Also haben wir eine vertikale Tangente in den Punkten

$$\begin{aligned}
&(x(0), y(0)) = (3, 0) \\
&\left(x\left(\frac{2\pi}{3}\right), y\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
&\left(x\left(\frac{4\pi}{3}\right), y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Mit diesen Eigenschaften, kann man die Kurve skizzieren.

b) Die Kurve ist:



c) Für eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$ kann man die Krümmung

Bitte wenden!

durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

In unserem Fall sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t + \sin(2t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t - 2\sin(2t) \\ 2\cos t + 2\cos(2t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos t - 4\cos(2t) \\ -2\sin t - 4\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Rechnen wir zuerst

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= (-2\sin t - 2\sin(2t))^2 + (2\cos t + 2\cos(2t))^2 \\ &= 4 + 4 + 8(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)) \\ &= 8(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t) &= (-2\sin t - 2\sin(2t))(-2\sin t - 4\sin(2t)) - (-2\cos t - 4\cos(2t))(2\cos t + 2\cos(2t)) \\ &= 8 + 4 + 12(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)) \\ &= 12(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)). \end{aligned}$$

aus. Daher kriegen wir

$$k(t) = \frac{12(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))}{8^{\frac{3}{2}}(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{8(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{8(\cos(t) + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei haben wir benutzt, dass $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ und $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$.

Die Parameterdarstellung der Evoluten ist

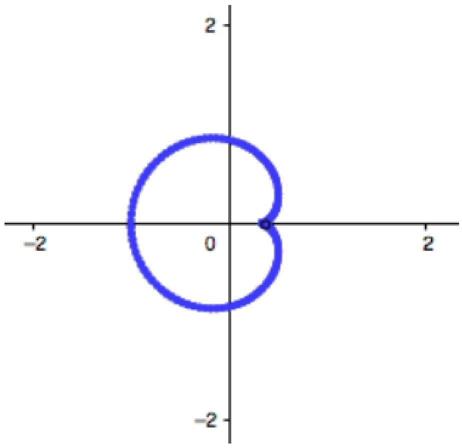
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) - \dot{y}(t)\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \\ y(t) + \dot{x}(t)\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \end{pmatrix}.$$

Mit den obigen Berechnungen kriegen wir

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) - (2\cos t + 2\cos(2t))\frac{2}{3} \\ 2\sin t + \sin(2t) + (-2\sin t - 2\sin(2t))\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cos t - \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

d) Das kann analog wie in Teilaufgabe **a)** gemacht werden.

Siehe nächstes Blatt!



8. (★★★) Die *Astroide* ist durch folgende implizite Gleichung gegeben

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

a) Finde die Gleichung der Astroide in Polarkoordinaten (d.h. $\varrho = f(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$).

b) Für welche Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist der Radius ϱ minimal?

Es sei $\varrho = f(\varphi)$. Somit gilt

$$x = f(\varphi)\cos(\varphi), \;\; y = f(\varphi)\sin(\varphi).$$

Weil

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1,$$

folgt

$$f(\varphi)^{2/3}\left(\cos(\varphi)^{2/3} + \sin(\varphi)^{2/3}\right) = 1$$

und deshalb

$$f(\varphi) = \frac{1}{\left(\cos(\varphi)^{2/3} + \sin(\varphi)^{2/3}\right)^{3/2}}.$$

Wir berechnen

$$f'(\varphi) = -\frac{3\left(\frac{2\cos(\varphi)}{3\sqrt[3]{\sin(\varphi)}} - \frac{2\sin(\varphi)}{3\sqrt[3]{\cos(\varphi)}}\right)}{2\left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi)\right)^{5/2}}.$$

Und somit $f'(\varphi) = 0$ genau dann wenn

$$\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)^{1/3}} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)^{1/3}},$$

was äquivalent zu

$$\cos(\varphi)^{4/3} = \sin(\varphi)^{4/3} \iff |\cos(\varphi)| = |\sin(\varphi)|$$

ist. Es gilt $|\cos(\varphi)| = |\sin(\varphi)|$ genau dann wenn $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ (das überlegt man sich am besten am Einheitskreis). Weiter gilt

$$f''(\varphi) = \frac{15\left(\frac{2\cos(\varphi)}{3\sqrt[3]{\sin(\varphi)}} - \frac{2\sin(\varphi)}{3\sqrt[3]{\cos(\varphi)}}\right)^2}{4\left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi)\right)^{7/2}} - \frac{3\left(-\frac{2}{3}\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) - \frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}}(\varphi) - \frac{2\sin^2(\varphi)}{9\cos^{\frac{4}{3}}(\varphi)} - \frac{2\cos^2(\varphi)}{9\sin^{\frac{4}{3}}(\varphi)}\right)}{2\left(\sin^{\frac{2}{3}}(\varphi) + \cos^{\frac{2}{3}}(\varphi)\right)^{5/2}}.$$

Bitte wenden!

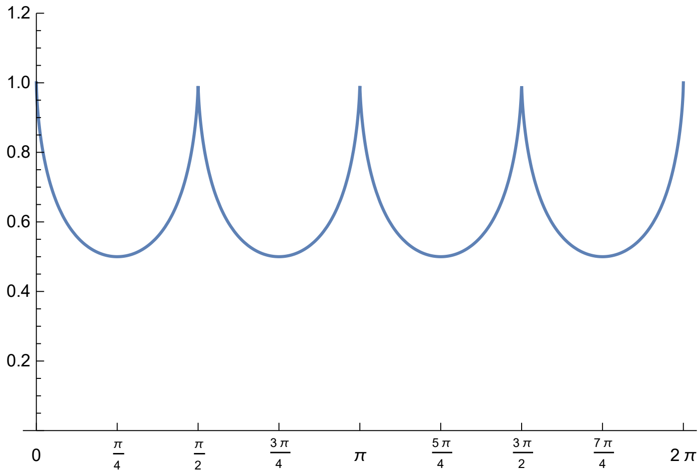


Abbildung 1: Graph von $\varrho = f(\varphi)$

Es sei $\varphi_0 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ und $d = |\cos(\varphi_0)| = |\sin(\varphi_0)|$. Man erhält

$$f''(\varphi_0) = 0 - \frac{3\left(-\frac{2}{3}d^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}d^{\frac{2}{3}} - \frac{2d^2}{9d^{\frac{4}{3}}} - \frac{2d^2}{9d^{\frac{4}{3}}}\right)}{2\left(d^{\frac{2}{3}} + d^{\frac{2}{3}}\right)^{5/2}} = \frac{3 \cdot \frac{16}{9} \cdot d^{2/3}}{2 \cdot 2^{5/2} d^{5/3}} = \frac{8}{3}\frac{1}{2^{5/2}}\frac{1}{d} = \frac{2}{3} > 0,$$

weil $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Somit hat die Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ an den Punkten $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ lokale Minima. Weil die Funktion f periodisch ist mit Periode $\frac{\pi}{2}$ und die Punkte $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ die einzigen kritischen von f sind, handelt es sich dabei sogar um globale Mimima.

(Beachte, dass f genau an den Stellen $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ nicht differenzierbar ist. Weil aber $f(0) = 1 > f(\frac{\pi}{4})$ handelt es sich bei diesen Punkten nicht um globale Minima. Es gilt tatsc̈hlich sogar, dass der Radius an den Stellen $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ maximal wird.)

9. (★★½) Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b, a > 0, b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

Lösung: Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind durch die Nullstellen von $-ax^2+b$ gegeben, nämlich $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Die Fläche unter der Parabel ist wegen der Symmetrie gegeben durch

$$\begin{aligned} F(a,b) &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \left(-ax^2 + b\right)\, dx = 2\left[-\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \\ &= 2\left(-\frac{a}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} + b\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}\right) = \frac{4}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{1/2}} \end{aligned}$$

Es gilt $F(a,b) = \frac{4}{3}$ genau dann, wenn $a = b^3$. Somit ist die gesuchte Schar gegeben durch

$$f(x) = -b^3x^2 + b,\ b > 0.$$