D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2019
Dr. Andreas Steiger

Schnellübung 0

1. (★★) Seien x, y reelle Zahlen und n eine ganze Zahl. Vereinfache die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

a)

$$2\ln(x) + \frac{1}{2}\big(\ln(x+y) + \ln(x-y)\big)$$

Lösung: Wir rechnen

$$\begin{aligned} 2\ln(x) + \frac{1}{2}\big(\ln(x+y) + \ln(x-y)\big) &= \ln(x^2\sqrt{(x+y)(x-y)}) \\ &= \ln(x^2\sqrt{x^2-y^2}). \end{aligned}$$

b)

$$(n+1)\ln(x) - \frac{1}{3}\ln(x^{6n})$$

Lösung: Wir rechnen

$$\begin{aligned} (n+1)\ln(x) - \frac{1}{3}\ln(x^{6n}) &= \ln(x^{n+1}) - \ln(x^{2n}) \\ &= \ln(x^{n+1}) + \ln(x^{-2n}) \\ &= \ln(x^{n+1}x^{-2n}) \\ &= \ln x^{1-n} \end{aligned}$$

c) Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ sind die Ausdrücke in a) und b) definiert?

Lösung: In a) muss x positiv und $|y| < |x|$ sein. In b) muss x positiv sein. Die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ kann beliebig sein.

d) Löse die folgende Gleichung nach x auf:

$$10^{x^2} = 100$$

Lösung: Es gilt $x^2 = \log_{10} 100 = 2$. Also folgt, dass

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

2. (★★)

Bitte wenden!

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x+3| \geq 3$?

Lösung: $x \leq -6$ oder $x \geq 0$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-2| \geq |x| - 2$?

Lösung: $x \in \mathbb{R}$

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x^2-2x+2}{x+2} \geq 2 - x$?

Lösung: $-2 < x \leq \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ oder $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leq x$.

d) Zeichne die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$.

Lösung: Gebiet zwischen zwei auf der Spitze stehenden, im Ursprung zentrierten Quadraten mit Seitenlängen $\sqrt{2}$ und $2\sqrt{2}$.

3. (★) Vereinfache die folgenden Terme für $n \in \mathbb{Z}$ mithilfe der Potenzgesetze soweit wie möglich

a) $90 \cdot 3^{n-2} - 3^n$

Lösung:

$$90 \cdot 3^{n-2} - 3^n = 10 \cdot 3^2 \cdot 3^{n-2} - 3^n = 10 \cdot 3^n - 3^n = 9 \cdot 3^n = 3^{n+2}$$

b) $\frac{(3a-1)^{2n-1}}{(1-3a)^{2n+1}}$

Lösung:

$$\frac{(3a-1)^{2n-1}}{(1-3a)^{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n-1}(1-3a)^{2n-1}}{(1-3a)^{2n+1}} = -\frac{1}{(1-3a)^2}$$

c) $\frac{x^5+1}{x^{n+2}} - \frac{2x^2-2}{x^n} + \frac{2-x}{x^{n-2}}$

Lösung:

$$\frac{x^5+1}{x^{n+2}} - \frac{2x^2-2}{x^n} + \frac{2-x}{x^{n-2}} = \frac{x^5+1-2x^4+2x^2+2x^4-x^5}{x^{n+2}} = \frac{1+2x^2}{x^{n+2}}$$