Lösung - Schnellübung 1

1. (★★) Gesucht sind je eine Liste der Nullstellen der Funktionen

$$f\colon x \mapsto \cos(3x+1) \quad \text{und} \quad g\colon x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad h\colon x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1.$$

Für welche Werte von x ist $f(x) = 1$? Für welche Werte von x ist $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

Lösung:

- Es ist $\cos\phi = 0$ für $\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist $\cos(3x+1) = 0$ für $3x + 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ und somit

$$\cos(3x+1) = 0 \iff x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi - 1\right), k \in \mathbb{Z}.$$

- Es ist $\sin\phi = 0$ für $\phi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Deshalb ist $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ für $\frac{1}{x} = k\pi$ und somit

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff x = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

- Durch das Einsetzen kleiner ganzen Zahlen erhält man $h(-1) = 0$ und $h(1) = 0$. Es gilt $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. Da eine der Nullstellen -1 und 1 eine doppelte Nullstelle von h sein könnte, liegt es nahe $(x^2-1)(x-1)$ auszurechnen und tatsächlich $(x^2-1)(x-1) = x^3 - x - x^2 + 1 = h(x)$. Deshalb haben wir gezeigt $h(x) = (x-1)^2(x+1)$ und somit sind -1 und 1 alle Nullstellen von h.
- Es ist $\cos(3x+1) = 1$ für $3x + 1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und somit

$$\cos(3x+1) = 1 \iff x = \frac{1}{3}(2k\pi - 1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Es ist $\sin(\frac{1}{x}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ für $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oder $\frac{1}{x} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, und somit

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \text{ oder } x = \frac{1}{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. (★★★)

Bitte wenden!

a) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $1 + 2 + \cdots + n$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

$$\begin{array}{lccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n & = & x \\ \textit{Tipp:} & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 & = & x \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & 2x \end{array}$$

b) Berechnen Sie, ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners, die Summe aller zweistelligen natürlichen Zahlen (≥ 10), die durch drei geteilt den Rest zwei ergeben.

Lösung:

a) Es bezeichne x den Ausdruck $1 + 2 + \cdots + n$. Dann gilt (hier formalisieren wir den Tipp)

$$x = \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i).$$

Summiert man nun die letzteren beiden Ausdrücke für x, so folgt

$$2x = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) \right) = \sum_{i=1}^{n} (n + 1) = n(n + 1).$$

Folglich ist $x = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Die erste (bzw. letzte) zweistellige natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist 11 (bzw. 98). Also sind die Zahlen, die addiert werden, Glieder der Folge $a_n = 11+3(n-1)$, mit $n = 1, 2, \ldots, 30$. Wenn man die Summe nun mit S bezeichnet, gilt

$$S = \sum_{n=1}^{30} (11 + 3(n - 1)) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot \left(\sum_{n=1}^{30} n - 30 \right) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot \left(\frac{30 \cdot 31}{2} - 30 \right)$$

Somit ist $S = 11 \cdot 30 + 3 \cdot (15 \cdot 31 - 15 \cdot 2) = 30 \cdot 11 + 3 \cdot 15 \cdot 29 = 1635$.

3. (★★) Es seien $p \leq q$ ganze, nicht-negative Zahlen. Zeigen Sie, dass für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n = \frac{c_0 + c_1 n + \cdots + c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \cdots + d_q n^q}$$

und $c_p \neq 0,\ d_q \neq 0$, gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} \frac{c_p}{d_q}, \text{ falls } p = q, \\ 0, \text{ falls } p < q. \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Ist (a_n) ebenfalls konvergent falls $p > q$? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

Für $p \leq q$ hat man, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c_0}{n^q} + \frac{c_1}{n^{q-1}} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{n^{q-(p-1)}} + \frac{c_p}{n^{q-p}}}{\frac{d_0}{n^q} + \frac{d_1}{n^{q-1}} + \ldots + \frac{d_{q-1}}{n} + d_q} = \frac{c_p}{d_q} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{q-p}}.$$

Der letzte Limes ist gleich 1, wenn $p = q$, und null, wenn $p < q$.

Falls $p > q$, dann ist die Folge (a_n) divergent. Tatsächlich

$$a_n = \frac{c_0 + c_1 n + \ldots + c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \ldots + d_q n^q} \geq \frac{c_p n^p}{d_0 + d_1 n + \ldots d_q n^q}$$

und deshalb

$$a_n \geq c_p n^{p-q} \frac{1}{\frac{d_0}{n^q} + \frac{d_1}{n^{q-1}} + \ldots + \frac{d_{q-1}}{n} + d_q}.$$

Der Term

$$\frac{1}{\frac{d_0}{n^q} + \frac{d_1}{n^{q-1}} + \ldots + \frac{d_{q-1}}{n} + d_q}$$

konvergiert gegen $\frac{1}{d_q}$ und der Term $c_p n^{p-q}$ wird wegen $p > q$ beliebig gross und deshalb wird auch a_n für genung grosse n beliebig gross. Wir haben also gezeigt, dass die Folge (a_n) divergiert falls $p > q$.

4. (★★★) Berechnen Sie den Grenzwert der beiden unendlichen Zahlenfolgen

$$2,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots \quad \text{und} \quad 3,\ 3\sqrt[3]{3},\ 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}},\ 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}, \ldots.$$

Lösung:

Es gilt: $2 = 2^1, 2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}}, 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^1 \cdot \left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ und $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$ und so weiter.
Die geometrische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

hat den Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Da die Funktion $t \mapsto 2^t$ stetig ist, ist der gesuchte Grenzwert gleich $2^2 = 4$.
Analog gilt $3 = 3^1, 3\sqrt[3]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}}, 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = 3^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}$ und so weiter. Die hier verwendete geometrische Reihe hat den Grenzwert $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
Also ist der gesuchte Grenzwert gleich $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.