

Schnellübung 2

1. (★★) Berechnen Sie jeweils die Summe $z + w$, das Produkt $z \cdot w$ und den Quotienten z/w in kartesischer Form.

a) $z = 1 + i, w = i$

b) $z = -4 - 16i, w = -5 - 10i$

Zeichnen Sie in der komplexen Ebene folgende Mengen.

c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > |z|^2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Im}(z)\}$

2. (★★★)

a) Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nehmen an, dass $b \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{|w| - a}{2}} \right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0; \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für eine reelle Zahl x .

b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3 + 4i$.

3. (★★) Geben Sie sämtliche komplexen Lösungen x der Gleichung $x^3 + 2 = 0$ an, und zwar

Bitte wenden!

- (i) in der Form $x = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$,
- (ii) in der Form $x = y + iz$ mit $y, z \in \mathbb{R}$.

Welche geometrische Figur entsteht, wenn man die Lösungen in der komplexen Ebene mit Geradenstücken verbindet?

4. (★★★)

- a) Der Schwerpunkt eines Objekts befindet sich am Punkt $5 + 2i$. An welchem Ort befindet sich der Schwerpunkt des Objekts, nachdem dieses in der komplexen Ebene um 90° im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt rotiert wurde?
- b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z^2 - 3z + 2$ für $z = 2 + i$.
- c) Wie müssen $p, q \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so dass

$$\frac{z + 1}{pz + q} = 3 + 2i,$$

wobei $z = 7 + 5i$?