Lösung - Schnellübung 2

1. (★★) Berechnen Sie jeweils die Summe $z+w$, das Produkt $z \cdot w$ und den Quotienten z/w in kartesischer Form.

a) $z = 1 + i$, $w = i$

b) $z = -4 - 16i$, $w = -5 - 10i$

Zeichnen Sie in der komplexen Ebene folgende Mengen.

c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > |z|^2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$

Lösung:

a) Es gilt:

$$z + w = (1 + i) + i = (1 + 0) + (1 + 1)i = 1 + 2i,$$
$$z \cdot w = (1 + i) \cdot i = i + i^2 = -1 + i,$$
$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(1 + i)(-i)}{1} = -i - i^2 = 1 - i.$$

b) Es gilt:

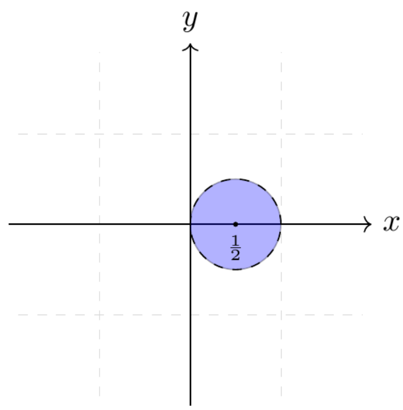
$$z + w = (-4 - 16i) + (-5 - 10i) = -9 - 26i,$$
$$z \cdot w = (-4 - 16i) \cdot (-5 - 10i) = 20 + 40i + 80i + 160i^2 = -140 + 120i,$$
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{(-4 - 16i) \cdot (-5 + 10i)}{125} = \frac{20 - 40i + 80i - 160i^2}{125} = \frac{180 + 40i}{125} = \frac{36}{25} + \frac{8}{25}i.$$

c) Wir schreiben $z = x + iy$. Die Gleichung $\mathrm{Re}(z) > |z|^2$ bekommt:

$$\begin{aligned} x > x^2 + y^2 \Leftrightarrow \quad & 0 > x^2 - x + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4} > \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung beschreibt eine Scheibe (ohne Rand) von Radius $\frac{1}{2}$ um Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$.

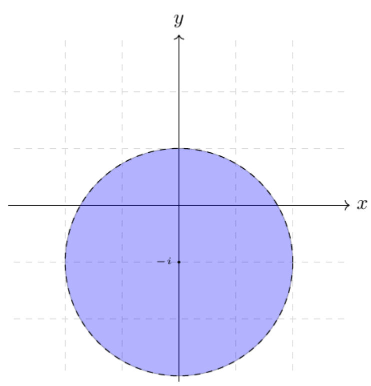
Bitte wenden!



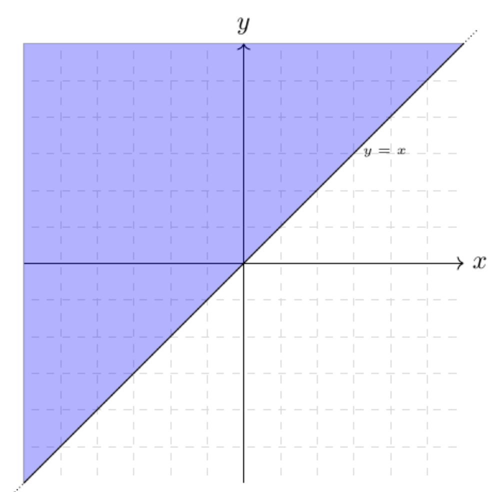
d) Wir schreiben $z = x + iy$. Die Ungleichung $|z + i| < 2$ bekommt:

$$x^2 + (y + 1)^2 < 4,$$

welche eine Scheibe (ohne Rand) von Radius 2 um Punkt $(0, -1)$ beschreibt.



e) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$ beschreibt das Gebiet



Beachte, dass die Gerade $y = x$ nicht enthalten ist.

Siehe nächstes Blatt!

2. (★★½)

a) Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nehmen an, dass $b \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{|w| - a}{2}} \right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0; \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für eine reelle Zahl x.

b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3 + 4i$.

Lösung:

a) Da $z_1^2 = z_2^2$ gilt, reicht es, die Behauptung für z_1 zu beweisen. Beachte zuerst, dass die Bedingung $b \neq 0$ impliziert $|w| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$ und somit $|w| + a \geq |a| + a \geq 0$. Analog, $|w| - a \geq 0$. Insbesondere sind die beide Zahlen $\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}$ und $\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}$ reell.

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{|w| - a}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{|w| + a}{2} + 2i\operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{(|w| + a)(|w| - a)}{4}} - \operatorname{sgn}(b)^2 \frac{|w| - a}{2} \\ &= \frac{|w| + a}{2} - \frac{|w| - a}{2} + i\operatorname{sgn}(b) \sqrt{(|w| + a)(|w| - a)} = a + i\operatorname{sgn}(b) \sqrt{|w|^2 - a^2} \\ &= a + i\operatorname{sgn}(b) \cdot |b| = a + ib, \end{aligned}$$

da $\operatorname{sgn}(b) \cdot |b| = b$ gilt.

Bemerkung: Für $b = 0$, die Lösungen der Gleichung $z^2 = a$ sind gegeben durch

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{a}, \quad \text{falls } a \geq 0$$

und

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{-a}, \quad \text{falls } a < 0.$$

b) In diesem Beispiel gilt $|w| = 5$, $a = -3$ und $\operatorname{sgn}(b) = 1$. Einsetzen ergibt

$$z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{5 - 3}{2}} + i \sqrt{\frac{5 + 3}{2}} \right) = \pm(1 + 2i).$$

Beachten Sie, dass diese Formel hier von grossem Nutzen ist, da das Rechnen in Polarform deutlich mühsamer ist (der Polarwinkel ist nicht einfach darstellbar).

3. (★★) Geben Sie sämtliche komplexen Lösungen x der Gleichung $x^3 + 2 = 0$ an, und zwar

(i) in der Form $x = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$,

(ii) in der Form $x = y + iz$ mit $y, z \in \mathbb{R}$.

(iii) Welche geometrische Figur entsteht, wenn man die Lösungen in der komplexen Ebene mit Geradenstücken verbindet?

Lösung:

(i) Schreiben wir $x = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, so lautet die Gleichung

$$x^3 + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 = x^3 = \left(re^{i\varphi}\right)^3 = r^3 \left(e^{i\varphi}\right)^3 = r^3 e^{3i\varphi}.$$

Nehmen wir von beiden Seiten dieser Gleichung den Betrag, so folgt

$$2 = \left|r^3 e^{3i\varphi}\right| = \left|r^3\right| \cdot \left|e^{3i\varphi}\right| = r^3 \cdot 1 = r^3,$$

also $r = \sqrt[3]{2}$. Somit ist

$$-2 = 2e^{3i\varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = -e^{3i\varphi} = e^{i\pi} e^{3i\varphi} = e^{i(\pi + 3\varphi)}.$$

Daher muss

$$\pi + 3\varphi = 2\pi k\,,\; k \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{(2k-1)\pi}{3}\,,\; k \in \mathbb{Z},$$

gelten. Da wir uns auf Lösungen $\varphi \in [0, 2\pi)$ beschränken können, benötigen wir nur die drei Fälle $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$, also $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$ und $\varphi_3 = \frac{5\pi}{3}$. Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung lauten folglich

$$x_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2}, \quad x_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

(ii) Wir übernehmen das Ergebnis aus (i) und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ x_2 &= -\sqrt[3]{2}, \\ x_3 &= \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

(iii) Die Punkte x_1, x_2, x_3 formen ein Dreieck. Aus der Polarform lesen wir ab, dass $\angle(x_1, 0, x_2) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Analog gilt $\angle(x_2, 0, x_3) = \angle(x_3, 0, x_1) = \frac{2\pi}{3}$. Da die Dreiecke $(x_1, 0, x_2)$ und $(x_2, 0, x_3)$ und $(x_3, 0, x_1)$ gleichschenklig (mit Schenkellänge 2) sind, gilt

$$\angle(x_2, x_1, 0) = \angle(0, x_1, x_3) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}.$$

Also $\angle(x_2, x_1, x_3) = \angle(x_2, x_1, 0) + \angle(0, x_1, x_3) = \frac{\pi}{3}$. Analog gilt

$$\angle(x_3, x_2, x_1) = \angle(x_1, x_3, x_2) = \frac{\pi}{3}.$$

Da alle Winkel gleich sind, ist das Dreieck (x_1, x_2, x_3) gleichseitig mit Seitenlänge $|x_1 - x_3| = \sqrt[3]{2}\sqrt{3}$.

Siehe nächstes Blatt!

4. (★★★)

a) Der Schwerpunkt eines Objekts befindet sich am Punkt $5+2i$. An welchem Ort befindet sich der Schwerpunkt des Objekts, nachdem dieses in der komplexen Ebene um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt rotiert wurde?

b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl z^2-3z+2 für $z=2+i$.

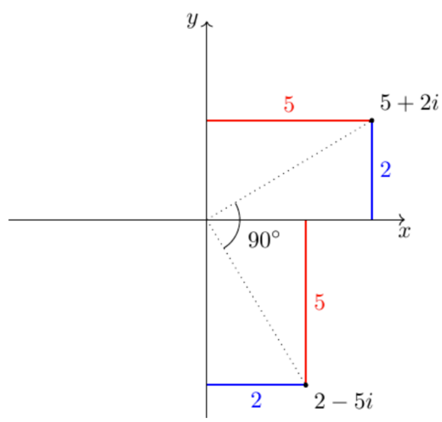
c) Wie müssen $p,q\in\mathbb{R}$ gewählt werden, so dass

$$\frac{z+1}{pz+q}=3+2i,$$

wobei $z=7+5i$?

Lösung:

a) Sei w die Position der Punkt $5+2i$ nach einer Rotation um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt. Aus dem Bild sehen wir, dass $\text{Re}(w)=2$ und $\text{Im}(w)=-5$. Also $w=2-5i$.



b) Wir berechnen für $z=2+i$:

$$z^2-3z+2=(2+i)^2-3(2+i)+2=4+4i+i^2-6-3i+2=i-1.$$

Also gilt $\text{Re}(z^2-3z+2)=-1$ und $\text{Im}(z^2-3z+2)=1$.

c) Wir setzen $z=7+5i$ in $\frac{z+1}{pz+q}$ ein:

$$\frac{z+1}{pz+q}=\frac{8+5i}{7p+q+5pi}=\frac{(8+5i)(7p+q-5pi)}{(7p+q)^2+(5p)^2}=\frac{81p+8q+5(q-p)i}{(7p+q)^2+(5p)^2}$$

Die Bedingung $\frac{z+1}{pz+q}=3+2i$ und Vergleichung von Reell- und Imaginärteil geben das System

$$(7p+q)^2+(5p)^2=\frac{1}{3}(81p+8q)$$
$$(7p+q)^2+(5p)^2=\frac{1}{2}(5q-5p).$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten:

$$q=-177p.$$

Einsetzen in die erste Gleichung gibt: $p=0$ oder $p=-\frac{1}{65}$. Die Lösung $p=0$ wurde $q=0$ implizieren, was nicht erlaubt ist. Somit haben wir $p=-\frac{1}{65}$ und $q=\frac{177}{65}$.