Lösung - Schnellübung 3

1. (★★) Berechnen Sie $f'\colon D(f) \to \mathbb{R}$ für

a) $f\colon [-1,1] \to [0,\pi],\ x \mapsto \arccos(x)$;

b) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(x^{\frac{1}{3}} + \sin\left(\arctan(x)\right)\right)^{2017}$;

c) die Umkehrfunktion f von $g\colon (0,+\infty) \to (0,2),\ x \mapsto 2e^{-x^2}$.

Lösung:

a) Mittels der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen wir

$$f'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Weil $\arccos x \in [0,\pi]$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt $\sin(\arccos x) \geq 0$ für alle $x \in [-1,1]$ und deshalb

$$\frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es gilt also

$$\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) Aus Serie 2 Aufgabe 9d) wissen wir, dass

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

und deshalb gilt

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2017}.$$

Somit berechnen wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2017\left(\frac{1}{3x^{2/3}} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x}\right)^{2016} \\ &= 2017\left(\frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x}\right)^{2016}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) Weil

$$2e^{-\left(\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}\right)^2} = 2e^{-\ln\left(\frac{2}{x}\right)} = 2\frac{1}{\frac{2}{x}} = x,$$

ist die Funktion f gegeben durch $x \mapsto \sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}$. Man kann f nun einfach direkt ableiten oder die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion benutzen. Weil gilt

$$g'(x) = -4xe^{-x^2},$$

berechnen wir mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'(x) = \frac{1}{-4f(x)e^{-f(x)^2}} = \frac{1}{-4\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}\frac{x}{2}} = \frac{1}{-2x\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}}.$$

2. (★★) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls f eine gerade Funktion ist, dann ist f' eine ungerade Funktion.

Lösung:

Aus $f(x) = f(-x)$ folgt durch beidseitiges Ableiten $f'(x) = -f'(-x)$. D.h. $f'(-x) = -f'(x)$. Also ist f' ungerade.

3. (★★) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x).$$

a) Zeigen Sie $f''(x) - 4f(x) = 0$.

b) Zeigen Sie $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 0$. Wieso folgt daraus, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

c) Zeigen Sie $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x)\\
f'(x) &= 2\cosh(2x) - 2(\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2)\\
f''(x) &= 4\sinh(2x) - 4(\sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)\sinh(x)).
\end{aligned}$$

Deshalb gilt, $f''(x) - 4f(x) = 0$, wie gewünscht.

b) Mit den in Teilaufgabe a) berechneten Ableitungen sieht man, dass

$$\begin{aligned} &f(x) + \frac{1}{2}f'(x) \\ &= (\sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x)) + \big(\cosh(2x) - (\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2)\big) \\ &= \sinh(2x) + \cosh(2x) - (\sinh(x)^2 + 2\sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)^2) \\ &= e^{2x} - (\sinh(x) + \cosh(x))^2 = e^{2x} - e^{2x} = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $f'(x) = -2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil ebenfalls gilt, $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$, folgt, dass

$$f(x) = Ce^{-2x},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. (Hier haben wir den Satz auf Seite 35, Kapitel II, Teil A vom STAMMBACH verwendet). Beachte, dass $f(0) = 0$ und deshalb $0 = f(0) = Ce^0 = C$, also $C = 0$ und somit $f = 0$, was zu zeigen war.

c) Nach Teilaufgabe b) gilt $f'(x) = -2f(x)$, also insbesondere $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass

$$f'(x) = 2\cosh(2x) - 2(\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2),$$

also folgt $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wie gewünscht.

4. (★★) Berechnen Sie, mit Hilfe der *Bernoulli-Hôpital*-Regel folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-4x} - 1}{2x^2 - 8x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4) - 1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 5}{x\ln^2(x)}$

Lösung:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-4x} - 1}{2x^2 - 8x} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(2x-4)e^{x^2-4x}}{4x-8} = \frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4) - 1} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{(\pi/4)\sec^2(\pi x/4)} = \frac{1}{\pi}.$$

c) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 5}{x\ln^2(x)} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{\ln^2(x) + 2\ln(x)} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln(x) + 1} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty.$$