D-MAVT, D-MATL | Analysis I | HS 19
Dr. Andreas Steiger

Schnellübung 4

1. (★★) Zeige $e^x \geq x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln(x) \leq x-1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mittels Methoden der Extremalwertrechnung.

2. (★★★) Es sei

$$\begin{aligned} f(x) &= nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x, \\ g(x) &= \ln(e^x - x)\ln(e^x - x^2)\cdots\ln(e^x - x^n). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt $f(x) = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$ und $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$.

Gilt auch $f(x) = o(g(x))$ oder $g(x) = o(f(x))$?

3. (★★½) Der Graph $\Gamma(f)$ einer Funktion $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ kann über die Parametrisierung $\vec{r}(t) := (t, f(t))$ als ebene Kurve aufgefasst werden.

a) Bestimmen Sie Formeln für die Krümmung $t \mapsto k(t)$ und die Evolute $t \mapsto \vec{E}(t)$ des Graphs einer beliebigen zweifach stetig differenzierbaren Funktion f. Was ist der Definitionsbereich der Evolute?

b) Verwenden Sie die gefundenen Formeln, um Krümmung und Evolute der kubischen Parabel $f(t) = t^3$ zu bestimmen.

c) Wo wird für das gegebene f die Krümmung minimal oder maximal? (Beachten Sie hierbei das Vorzeichen.)

d) Wie verhält sich $\vec{E}(t)$ für das gegebene f in der Nähe von $t = 0$?