Lösung - Schnellübung 4

1. (★★) Zeige $e^x \geq x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln(x) \leq x-1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mittels Methoden der Extremalwertrechnung.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $F(x) := e^x - x - 1$, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist und die Funktion und $G(x) := \ln(x) - x + 1$, welche für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert ist. Wir berechnen

$$F'(x) = e^x - 1, \; G'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Die einzige Nullstelle von F' ist gegeben durch $x_F = 0$ und die einzige Nullstelle von G' ist gegen durch $x_G = 1$. Es gilt

$$F''(0) = 1, \; G''(1) = -1.$$

Somit ist x_F ein globales Minimum von F und x_G ein globales Maximum von G. Deshalb,

$$0 = F(0) \leq F(x), \; G(x) \leq G(1) = 0$$

für alle zulässigen $x \in \mathbb{R}$. Weil $F(x) \geq 0$, folgt

$$e^x \geq x + 1$$

und analog, weil $G(x) \leq 0$ folgt

$$\ln(x) \leq x - 1,$$

was zu zeigen war.

2. (★★★) Es sei

$$f(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x,$$
$$g(x) = \ln(e^x - x)\ln(e^x - x^2)\cdots\ln(e^x - x^n).$$

Zeigen Sie, dass gilt $f(x) = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$ und $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$.

Gilt auch $f(x) = o(g(x))$ oder $g(x) = o(f(x))$?

Bitte wenden!

Lösung: Beachte

$$\ln(e^x - x^k) = \ln\left(e^x(1 - \frac{x^k}{e^x})\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right).$$

Deshalb gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x^k)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right)} = 1.$$

Wir können also folgende Rechnung durchführen

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{\ln(e^x - x)\ln(e^x - x^2)\cdots\ln(e^x - x^n)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x)} \cdots \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x^n)} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{\ln(e^x)^n}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{\ln(e^x)^n} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{x^n} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n}{x^n} + \cdots + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = n \end{aligned}$$

und deshalb

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = n,$$

also $f(x) = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$.

Daraus folgt auch, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{n},$$

also $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$.

Zur Frage, ob die Beziehung $g(x) = o(f(x))$ oder $f(x) = o(g(x))$ gilt: die Antwort ist in beiden Fällen nein.

Im Allgemein gilt es: wenn $g(x) = O(f(x))$, dann ist $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > 0$. Insbesondere gilt $f(x) = o(g(x))$ **nicht**. Wenn $f(x) = O(g(x))$, dann ist $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| > 0$, insbesondere gilt $g(x) = o(f(x))$ **nicht**.

Beweis: Da $g(x) = O(f(x))$ gibt es $A \in [0, \infty)$ mit $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \leq A$. Falls $A = 0$, dann $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty > 0$. Andernfalls, haben wir

Siehe nächstes Blatt!

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|} \geq \frac{1}{A} > 0.$$

Analog, wegen $f(x) = O(g(x))$ gibt es $B \in [0,\infty)$ mit $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq B$. Falls $B = 0$, dann $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty > 0$. Andernfalls, haben wir

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|} \geq \frac{1}{B} > 0.$$

3. (★★½) Der Graph $\Gamma(f)$ einer Funktion $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ kann über die Parametrisierung $\vec{r}(t) := (t, f(t))$ als ebene Kurve aufgefasst werden.

a) Bestimmen Sie Formeln für die Krümmung $t \mapsto k(t)$ und die Evolute $t \mapsto \vec{E}(t)$ des Graphs einer beliebigen zweifach stetig differenzierbaren Funktion f. Was ist der Definitionsbereich der Evolute?

b) Verwenden Sie die gefundenen Formeln, um Krümmung und Evolute der kubischen Parabel $f(t) = t^3$ zu bestimmen.

c) Wo wird für das gegebene f die Krümmung minimal oder maximal? (Beachten Sie hierbei das Vorzeichen.)

d) Wie verhält sich $\vec{E}(t)$ für das gegebene f in der Nähe von $t = 0$?

Lösung:

a) Wir definieren $x(t) := t$ und $y(t) := f(t)$. Dann gilt $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Die allgemeine Formel für die Krümmung einer ebenen Kurve ist

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Wir setzen ein und erhalten (mit $\dot{x} = 1$ und $\ddot{x} = 0$):

$$k(t) = \frac{f''(t)}{\left(1 + f'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Die allgemeine Formel für die Evolute einer ebenen Kurve ist

$$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}(-\dot{y}, \dot{x}).$$

Bitte wenden!

Wir setzen wieder ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t) &= (t, f(t)) + \frac{\left(1+f'(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(t)\sqrt{1+f'(t)^2}}(-f'(t), 1) \\
&= (t, f(t)) + \frac{1+f'(t)^2}{f''(t)}(-f'(t), 1) \\
&= \left(t - \frac{(1+f'(t)^2)f'(t)}{f''(t)}, f(t) + \frac{1+f'(t)^2}{f''(t)}\right)
\end{aligned}$$

Die Evolute ist also für alle $t_0 \in D(f)$ definiert, an denen $f''(t_0) \neq 0$ gilt. Falls $f''(t_0) = 0$, ist die Krümmung $k(t_0) = 0$ und der „Krümmungskreis“ hat unendlichen Radius.

b) Es gilt $f'(t) = 3t^2$ und $f''(t) = 6t$. Wir setzen in die Formeln aus **a)** ein und erhalten

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{6t}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \\
\vec{E}(t) &= \left(t - \frac{(1+9t^4)\cdot 3t^2}{6t}, t^3 + \frac{1+9t^4}{6t}\right) \\
&= \left(\frac{t-9t^5}{2}, \frac{1+15t^4}{6t}\right),
\end{aligned}$$

wobei $\vec{E}(t)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert ist.

c) Die erste Ableitung der Krümmung ist

$$k'(t) = \frac{6(1-45t^4)}{(1+9t^4)^{5/2}}.$$

Darum hat k mögliche Extrema an den Stellen $t = \pm 45^{-1/4}$. Um zu bestimmen, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Wendepunkte handelt, könnten wir die zweite Ableitung der Krümmung berechnen und das bekannte Kriterium verwenden. Hier wollen wir uns dies jedoch ersparen und beschreiten einen anderen Weg. Es gilt nämlich

$$\lim_{t\to\pm\infty} k(t) = 0,\ k(45^{-1/4}) > 0 \text{ und } k(-45^{-1/4}) < 0,$$

somit liegt an der Stelle $t = -45^{-1/4}$ (bzw. $t = 45^{-1/4}$) ein globales Minimum (bzw. ein globales Maximum) der Krümmung vor.

d) Für kleine t ist $\vec{E}(t)$ asymptotisch zu $\vec{s}(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{1}{6t}\right)$, da die höheren Potenzen von t vernachlässigbar sind.