Lösung - Schnellübung 5

1. (★✦) Bestimmen Sie

a) $\int (t-x)\,dx$;

b) $\int (t-x)\,dt$;

c) $\int x\,e^{x^2}\,dx$;

d) $\int x\,(1+x^2)^9\,dx$;

e) $\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx$;

f) $\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\,dx$.

Lösung:

a) $\int (t-x)\,dx = tx - \frac{x^2}{2} + C.$

b) $\int (t-x)\,dt = \frac{t^2}{2} - xt + C.$

c) Wir nutzen $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ aus und erhalten

$$\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

d) Wir benutzen $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{10} = 20x(1+x^2)^9$ und erhalten

$$\int x\,(1+x^2)^9\,dx = \frac{1}{20}(1+x^2)^{10} + C.$$

e) Da $x = 1$ eine Nullstelle des Zählers ist, spalten wir diese zunächst ab (Polynomdivision) und erhalten

$$1 - x^5 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Damit ergibt sich

$$\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx = \int (1+x+x^2+x^3+x^4)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

f) $$\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(x+3)}{x+1}\,dx = \int (x+3)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C.$$

Bitte wenden!

2. (★★) Es sei f eine stetige Funktion definiert auf $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$F\colon\ x \mapsto \int_{-x}^{e^x} f(t)\,dt\,.$$

Bestimmen Sie F'.

Lösung:

Sei G eine Stammfunktion von f. Dann gilt $G'(x) = f(x)$. Die Funktion F ist nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung gegeben durch $F(x) = G(e^x) - G(-x)$. Also gilt mit der Kettenregel:

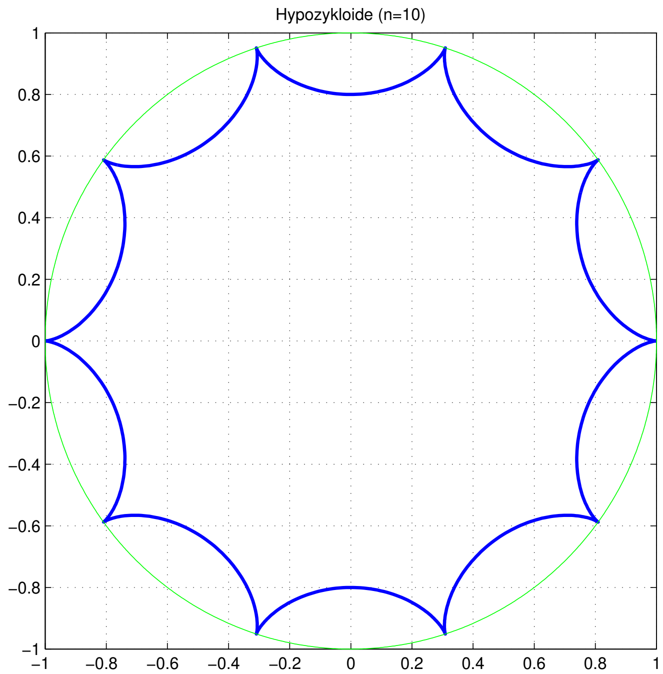
$$F'(x) = G'(e^x) \cdot e^x + G'(-x) = f(e^x) \cdot e^x + f(-x).$$

3. (★★½) Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Im Innern eines Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (eine *Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{1}{n}((n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi)),\\ y(\varphi) &= \frac{1}{n}((n-1)\sin\varphi - \sin((n-1)\varphi)) \end{aligned}$$

beschrieben wird.

Siehe nächstes Blatt!



a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von n, die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

b) Für welche n ist diese Fläche grösser als $2/3$ der Fläche des grossen Kreises?

Lösung:

a) Nach der Berechnung der Ableitungen von x und y erhält man

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) = \frac{n-1}{n^2}\left((n-1)\cos^2\varphi - (n-2)\cos\varphi\cos((n-1)\varphi) - \cos^2((n-1)\varphi)\right),$$
$$\dot{x}(\varphi)y(\varphi) = -\frac{n-1}{n^2}\left((n-1)\sin^2\varphi + (n-2)\sin\varphi\sin((n-1)\varphi) - \sin^2((n-1)\varphi)\right).$$

Aus der Beziehung $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ erhalten wir für $\alpha = \varphi$ und $\beta = (n-1)\varphi$ die Gleichung

$$\cos(\varphi)\cos((n-1)\varphi) = \cos(n\varphi) + \sin(\varphi)\sin((n-1)\varphi);$$

Daraus erhalten wir

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1-\cos n\varphi).$$

Bitte wenden!

Die gesuchte Fläche ist somit gegeben durch die Formel für die Sektorfläche und wir erhalten

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi)\,d\varphi = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\left[\varphi - \frac{\sin n\varphi}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\cdot 2\pi \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2}.
\end{aligned}$$

b) Der grosse Kreis hat Fläche π; gesucht sind also die Zahlen $n = 3, 4, \ldots,$ für welche das Folgende gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2} > \frac{2}{3}\pi \\
\Longleftrightarrow \quad & 3n^2 - 9n + 6 > 2n^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & n(n-9) + 6 > 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & n = 9,\ 10,\ \ldots
\end{aligned}$$