D-MAVT/D-MATL Analysis I HS 2019
Dr. Andreas Steiger

Serie 10

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 4.12.2019 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 4.12.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^2-2x+3}{x^3-x^2-x+1}.$$

(a) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(b) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(c) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(d) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$

Bitte wenden!

2. (★★) Welche der folgenden Subtitutionen kann verwendet werden, um das Integral $\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ als $\int \frac{2du}{3+u^2}$ auszudrücken?

(a) $u^2 = 2\cos(x) + 1$.

(b) $u = 2 + \cos(x)$.

(c) $u = \tan(x/2)$.

(d) $u = 4\tan(x)$.

3. (★★) Es sei $u = \sin(x)$. Durch Substitution folgt

$$\int_0^\pi x\sin(x)dx = \int_{u(0)}^{u(\pi)} \frac{xu}{du/dx} du = \int_0^0 \frac{xu}{du/dx} du = 0,$$

da $\int_a^a g(t)dt = 0$ für alle Funktionen g auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Allerdings folgt durch Verwendung der partiellen Integration, dass $\int_0^\pi x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi \neq 0$ gilt. Welcher der folgenden Sätze beschreibt, worin der Fehler unserer Überlegungen liegt?

(a) Die Funktion $\sin(x) - x\cos(x)$ ist keine Stammfunktion von $x\sin(x)$.

(b) Die Grenzen der Integration sind falsch.

(c) $\int_a^a g(t)dt = 0$ stimmt nicht für alle Funktionen g.

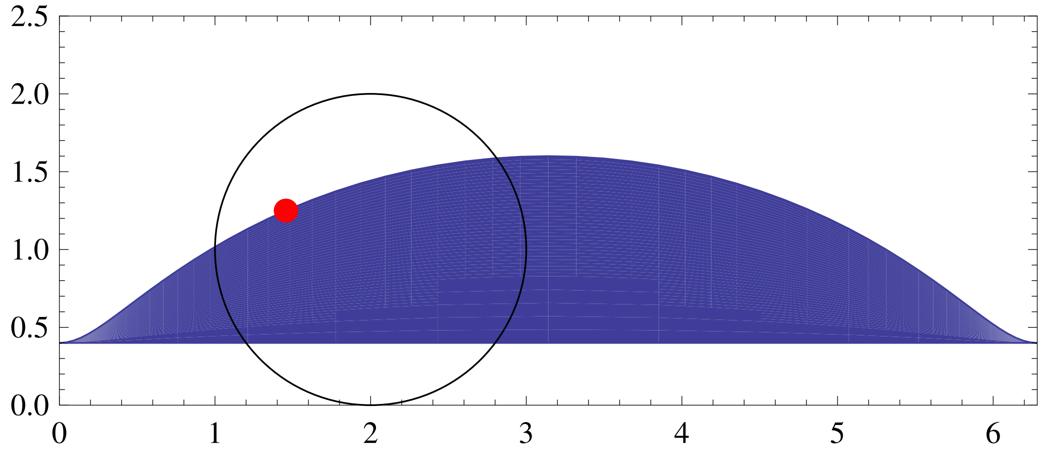
(d) Die Substitution $u = \sin(x)$ ist mit diesen Grenzen nicht erlaubt.

Siehe nächstes Blatt!

4. (★★) Die verkürzte Zykloide ist die Kurve die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist

$$\begin{cases} x(t) &= at - b\sin t \\ y(t) &= a - b\cos t, \end{cases}$$

mit $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(a) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$.

(b) $(2a^2 - 2a + b^2 + 2b)\pi$.

(c) $(2a^2 + b^2)\pi$.

(d) $(b^2 + 2ab)\pi$.

Bitte wenden!

5. (★★½) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{e^x-1}}$ *(Hinweis: Substituieren Sie* $u^2 = e^x - 1$*.)*;

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+3}$ *(Hinweis: Substituieren Sie* $u = x^2$*.)*;

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_3^4 x^3\cos(x^2)dx$;

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}dx$ *(Hinweis: Das Polynom* x^2+1 *ist ein Faktor des Nenners.)*;

h) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4+2x^2}dx$.

6. (★★) Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

b) Finden Sie eine Rekursionsformel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

c) Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

d)* Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

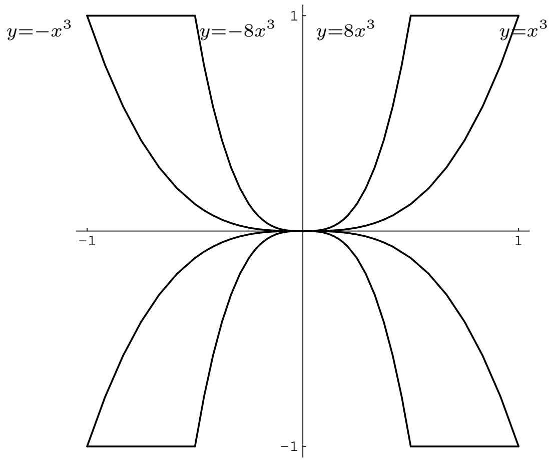
Hinweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Benutzen Sie unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(x)^n \mathrm{d}x$$

und $\ln(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \varepsilon$.

Siehe nächstes Blatt!

7. (★★) Berechnen Sie die Fläche des unten dargestellten x-förmigen Bereichs.



8. (★★½) Berechnen Sie die Fläche F des durch die ebene Kurve $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$ begrenzten Bereichs.

Hinweis: Eine im ersten Quadranten gültige Parametrisierung der Kurve ist durch $t \mapsto (\cos^4(t), \sin^4(t))$ mit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben. Verwenden Sie Symmetrien!