Serie 11

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 11.12.2019 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 11.12.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★) Sei $f(x) = \int_{\pi}^{x} \cos(\cos t)\, dt$. Dann ist $(f^{-1})'(0)$ gegeben durch

(a) -1

(b) $\frac{1}{\cos(1)}$

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{\cos(1)}$

Bitte wenden!

2. (★½) Es sei $a > 0$ eine Konstante. Was ist die Bogenlänge der *Kardioide*, gegeben in Polarkoordinaten durch $\rho(\phi) = 2a(1 + \cos\phi)$ für $\phi \in [0, 2\pi]$?

Hinweis: In Polarkoordinaten ist die Bogenlänge gegeben durch $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\mathrm{d}t$.

(a) $8a$

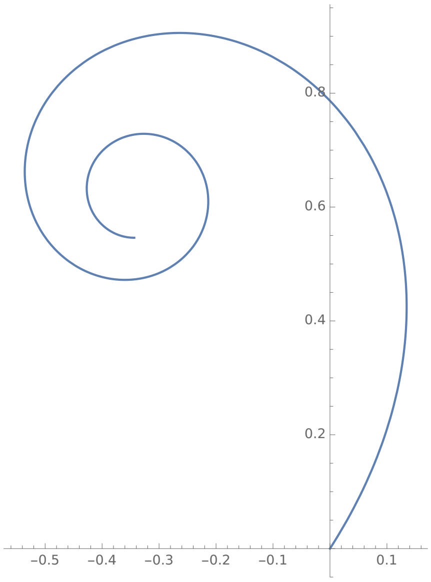
(b) $8\sqrt{2}a$

(c) $16a$

(d) $16\sqrt{2}a$

3. (★★) Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \mapsto (x(t),\, y(t)) = \left(\int_1^t \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u,\, \int_1^t \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u \right), \qquad t \in [1, 4\pi).$$



Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) π

(c) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

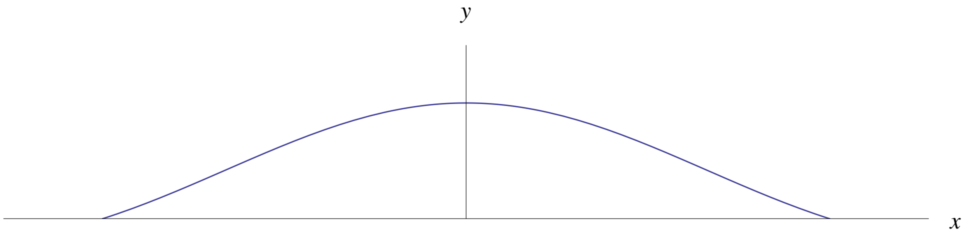
(d) $\ln(\pi)$

Siehe nächstes Blatt!

4. (★½) Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0; \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

wird um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?



(a) $\frac{2}{3}\pi^3$

(b) π^2

(c) 3π

(d) 4π

5. (★★) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die folgenden Kurven im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschliessen.

a) $\rho(\varphi) = \sqrt{\varphi}$

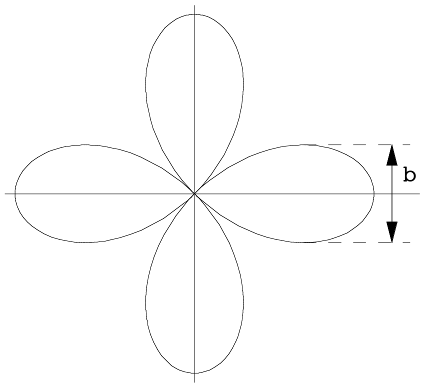
b) $\rho(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$

c) $\rho(\varphi) = |\sin(\varphi)|$

6. (★★½) Durch

$$\rho(\varphi) = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



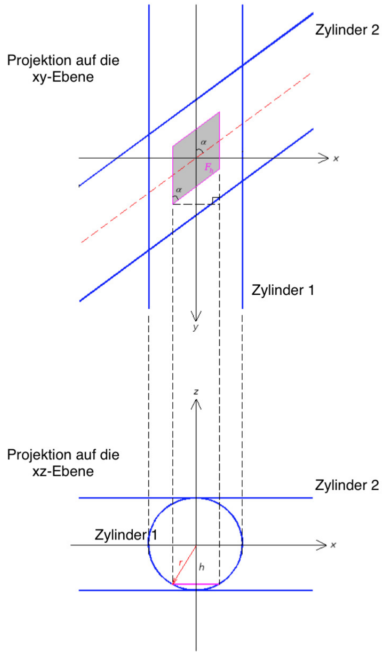
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

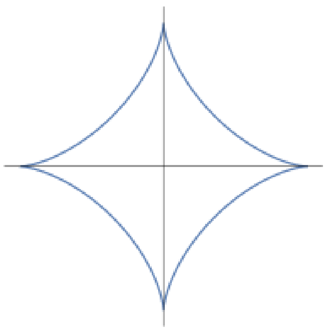
Bitte wenden!

7. (★★★) Zwei gerade Kreiszylinder Z_1 und Z_2 mit gleichem Grundkreisradius r durchdringen einander derart, dass sich ihre Achsen schneiden und den Winkel α einschliessen. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $Z_1 \cap Z_2$.

Hinweis: Zerschneiden Sie den Körper durch Ebenen, welche zu beiden Achsen parallel sind.



8. (★★★) Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sei in Abhängigkeit von a:

a) die Bogenlänge der Astroide;

Siehe nächstes Blatt!

b) die Fläche des Astroidensterns;

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

Erinnerung: (*für Teilaufgabe b)*) Es sei

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $I_2 = \frac{\pi}{4}$ und die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Es wurde auch die folgende Formel gezeigt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$