D-MAVT/D-MATL | Analysis I | HS 2019

Dr. Andreas Steiger

Serie 12

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 18.12.2019 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 18.12.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Wie gross ist die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der durch

$$y = \cos(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Kurve um die x-Achse entsteht, ungefähr?

Hinweis: $\displaystyle\int \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{\operatorname{Arsinh}(u) + u\sqrt{1+u^2}}{2} + C.$

(a) 14.424

(b) 19.961

(c) 28.847

Bitte wenden!

2. (★★) Die Kurve K, gegeben in Parameterdarstellung durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = e^{-t}\left(\cos(2t), \sin(2t)\right), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

rotiert um die x-Achse. Wie gross ist die dabei entstehende Oberfläche ungefähr?

(a) 2.317

(b) 3.664

(c) 84.792

3. (★) Liegt der Schwerpunkt eines rotationssymmetrischen Körpers immer auf dessen Rotationsachse?

(a) Ja. Andernfalls würde der Schwerpunkt nach der Rotation nicht mehr derselbe sein – er ist aber eindeutig.

(b) Nein. Dies würde im Umkehrschluss bedeuten, dass sich alle Rotationsachsen eines Körpers in einem Punkt schneiden müssten, was nicht immer der Fall ist.

4. (★½) Wenn man das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln(x)}}\, \mathrm{d}x$$

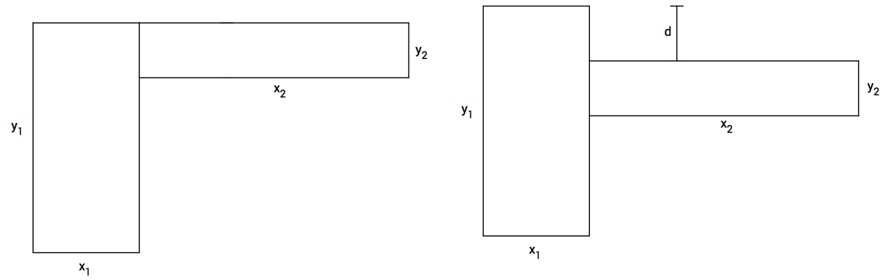
mit der passenden rationalen Funktion vergleicht, findet man heraus, dass dieses Integral. . .

(a) konvergiert.

(b) divergiert.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★) Betrachten Sie die folgenden Figuren, die beide aus den selben zwei homogenen Rechtecken zusammengesetzt sind und sich nur in der Platzierung des rechten (liegenden) Rechtecks unterscheiden (dieses ist um d nach unten versetzt):



Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$. Welche Aussagen über die Schwerpunkte S_1 (der linken Figur) und S_2 (der rechten Figur) sind wahr?

(a) Die x-Koordinaten von S_1 und S_2 stimmen überein.

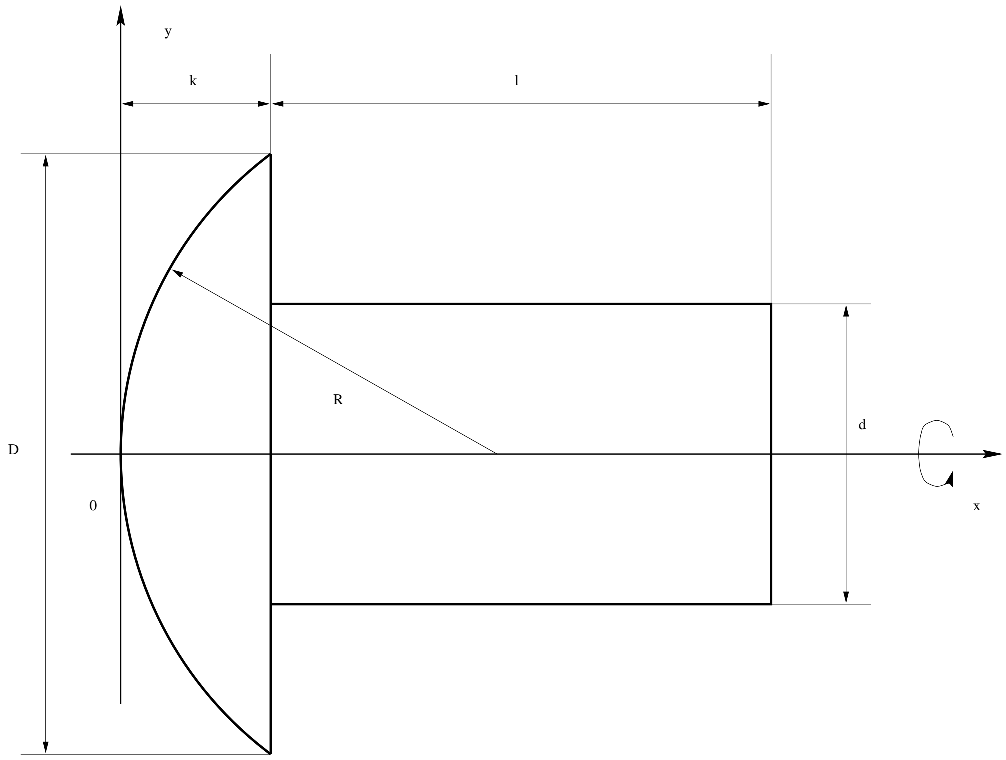
(b) Die Länge x_2 (bedeutet Ausdehnung in x-Richtung) des rechten (liegenden) Rechtecks kann so gewählt werden, dass die y-Koordinaten von S_1 und S_2 übereinstimmen.

(c) Die Differenz der y-Koordinaten von S_1 und S_2 beträgt d.

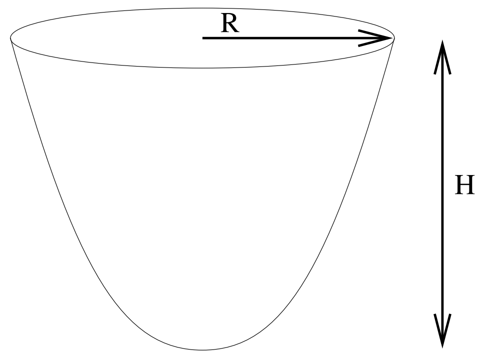
Bitte wenden!

6. (★★½)

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des in der Figur dargestellten, homogenen Rotationskörpers, dem Halbrundniet. Es sind $d = 16\text{mm}$, $D = 28\text{mm}$, $k = 11.5\text{mm}$ und $l = 80\text{mm}$.



b) Betrachten Sie das Rotationsparaboloid, das durch Rotation der Kurve $z = ax^2$ um die z-Achse gegeben ist:



Auf welcher Höhe liegt der Körperschwerpunkt?

Siehe nächstes Blatt!

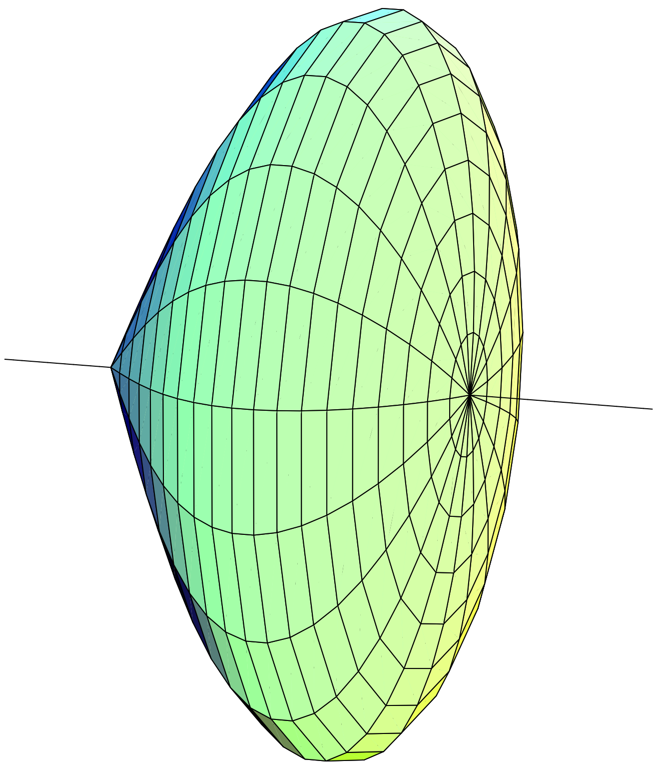
7. (★★⯨)

a) Eine dünne homogene Quadratplatte (Länge der Quadratseite s, Masse pro Flächeneinheit σ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Diagonale. Wie gross ist die kinetische Energie der Platte?

b) Das Flächenstück zwischen der x-Achse und dem durch die Parameterdarstellung

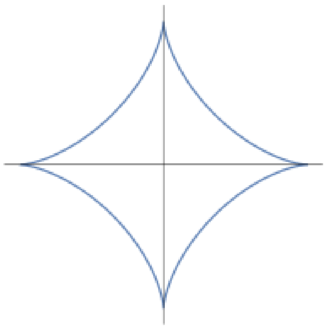
$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{aligned} \qquad (\text{für } 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2})$$

gegebenen Kurvenbogen wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelförmiger, homogener Körper mit homogener Dichte $\varrho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse.



Bitte wenden!

8. (★⯪) Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



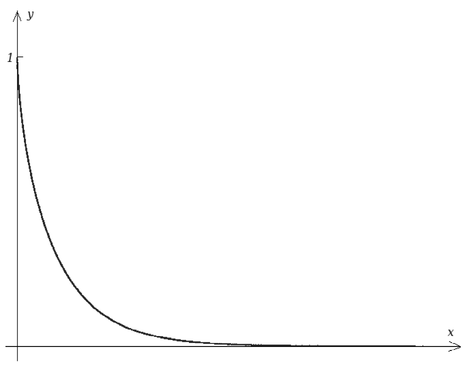
$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\cos^3 t \\
y(t) &= a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.
\end{aligned}
$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Oberfläche dieses Rotationskörpers der entsteht, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

9. (★★⯪) Es sei $T \in (0, \infty)$ eine positive reelle Zahl. Die Kurve K in der (x, y)-Ebene sei durch die Parametrisierung

$$s \longmapsto (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \sqrt{1 - e^{-2u}}\, \mathrm{d}u,\, e^{-s} \right), \quad s \in [0, T],$$

gegeben.



Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der durch Rotation von K um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von T.