Dr. Andreas Steiger

Serie 13 - Ferienserie

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 19.02.2020 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 19.02.2020* in der Vorlesung oder am selben Tag bis 12:15 ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★)Wenn man zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

(a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle x_0^2.

(d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Bitte wenden!

2. (★⯪) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ ist

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 2

(d) ∞

3. (★⯪) Es sei f die Funktion mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Welches der folgende Polynome ist das zweite Taylor-Polynom $P_2(x)$ im Punkt $x_0 = 0$?

(a) $1 + \frac{x^2}{2}$

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2}$

(c) $1 + x + x^2$

(d) $1 + x^2$

4. (★★) Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^{k-1}$

5. (★★) In welchem Bereich konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3(-1)^{k+1}(2x-1)^{2k}}{5^{2k}}$?

(a) $(-1, 2)$

(b) $(-4, 5)$

(c) $(-2, 2)$

(d) $(-2, 3)$

Siehe nächstes Blatt!

6. (★½) Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \sinh(x)$;

b) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^4)$.

7. (★★½) Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der Funktion

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \mathrm{d}t.$$

8. (★★½) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

a) $\displaystyle\int_0^8 (8 - x)^{-\frac{1}{3}}\, dx$;

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x + x^3}\, dx$; *Hinweis:* Partialbruchzerlegung.

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^4}}$;

d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$;

e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$;

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda^2 + x^2}\, dx$, wobei $\lambda > 0$.

g) Finden Sie den Wert der Konstante K, für welchen das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{K}{x + 2} \right) dx$$

konvergiert und berechnen Sie in diesem Fall das Integral.
Hinweis: Benützen Sie die Identität $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

9. (★★½) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$

in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führen Sie zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

10. (★★½) Berechnen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

Bitte wenden!

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$.

11. (★★★★) *Bonusaufgabe für den langen Winter:*

Bestimmen Sie den Wert des unbestimmten Integrals

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\ \mathrm{d}x$$

auf möglichst viele verschiedene Weisen! Ansätze:

a) Sinus und Cosinus sind auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ symmetrisch. Benutzen Sie dies, um $2I$ zu berechnen, und sorgen Sie dafür, dass auf der rechten Seite erneut I auftaucht.

b) Mit partieller Integration lässt sich I umschreiben zu einem Integral mit einem Cotangens. Verwenden Sie dann die *Fourierreihe* des Cotangens, um das Integral zu berechnen: Es gilt

$$\int_a^b f(x) \cot x\ \mathrm{d}x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f(x) \sin(2kx)\ \mathrm{d}x$$

c) Wenn man die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ lange genug studiert, findet man folgende Gleichung:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Schreiben Sie das Integral als Riemannsumme und nutzen Sie obige Gleichung, um den Grenzwert der Riemannsumme zu berechnen!