Serie 3

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 16.10.2019 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

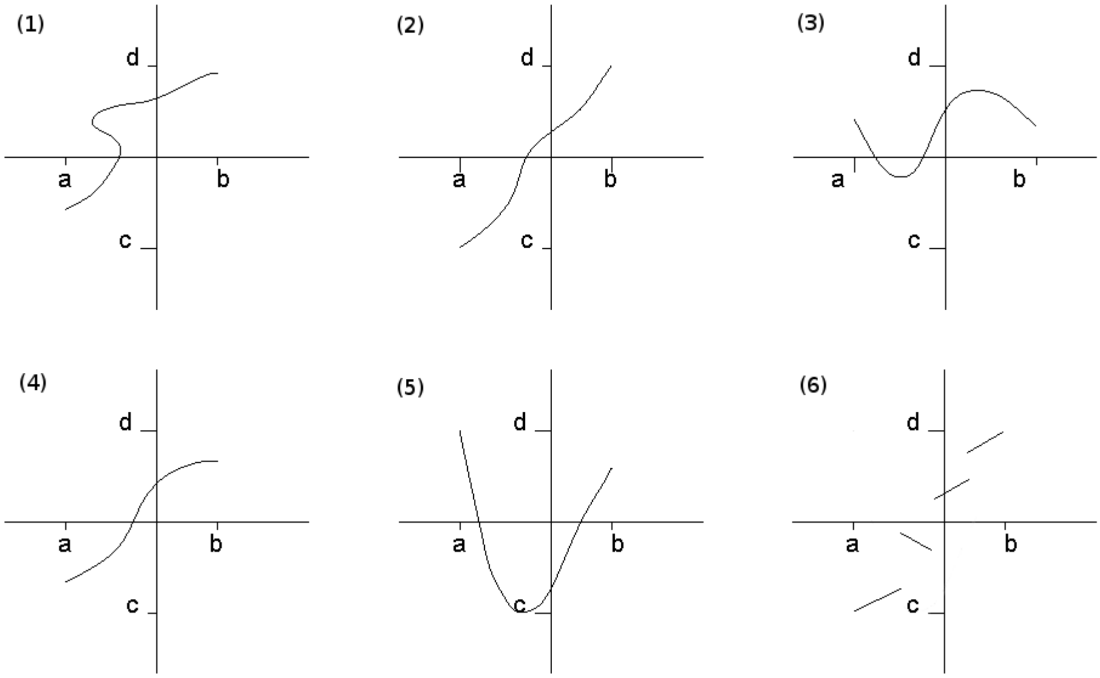
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 16.10.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

Bitte wenden!

1. (★) Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a,b] \to [c,d]$?



(a) (1)

(b) (2)

(c) (3)

(d) (4)

(e) (5)

(f) (6)

2. (★⯨) Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus ln zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2 - 1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

(e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$

3. (★★⯨) Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ ist injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D(f)\}$, ist gleich $[0,1]$.

(c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \left[0, \sqrt{1/2}\right],\ x \mapsto f(x)$.

4. (★⯨) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gelte ausserdem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) Dann ist g sicher eine Asymptote von f wenn $x \to \infty$

(b) g kann eine Asymptote von f sein wenn $x \to \infty$, muss aber nicht.

(c) Dann ist g sicher keine Asymptote von f wenn $x \to \infty$.

5. (★★) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

(c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

(e) $g(x) = e^{-x}$

Bitte wenden!

6. (★★) Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} &f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto 2x - 6 \\ &f_2\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), && x \mapsto |x| \\ &f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \min\{x^2 - 9, 0\} \\ &f_4\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, && x \mapsto \tfrac{x+1}{f_1(x)}. \end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5,5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1}\colon W(f_4) \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Hinweis: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ hier nicht explizit berechnen.

7. (★★½) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f_i je ein möglichst grosses Intervall I, so dass $f_i\colon I \to \mathbb{R}$ injektiv ist und $-3\pi \in I$. Was ist das Bild von I unter f_i?

a) $f_1(x) = x^4 + x^2$

b) $f_2(x) = e^x - 5$

c) $f_3(x) = \tan(x)$

8. (★★) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

b) $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;

c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

d) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

9. (★★½) In der Modellierung von idealem Populationswachstum unter der Bedingung von beschränkten Ressourcen taucht folgende Funktion $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ auf:

$$f(t) := G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot G \cdot t}\left(\frac{G}{m_0} - 1\right)}$$

Dabei beschreibt $G > 0$ die maximale Populationsgrösse, die durch die Ressourcenbeschränktheit erreicht werden kann, $k > 0$ beschreibt die Wachstumsrate und $m_0 > 0$ ist eine beliebig grosse Startpopulation zum Zeitpunkt $t = 0$.

a) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \to \infty$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Für welche m_0 und G kann der Definitionsbereich von f auf $\mathbb{R}$ ausgedehnt werden?

c) Bestimmen Sie für die in b) bestimmten m_0 und G eine möglichst einfache Asymptote von f für $t \to -\infty$.

d) Ist die Funktion $f\colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ (strikt) monoton? Beantworten Sie die Frage in Abhängigkeit von m_0 und G.

Bemerkung: Wenn es Ihnen hilft, rechnen Sie zuerst mit $k = G = 1$ und stellen Sie erst danach auf beliebige $k, G > 0$ um.