Serie 4

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 23.10.2019 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 23.10.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★½) Sei $z := 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(d) $5\sqrt{3}$

(e) Keines von diesen.

Bitte wenden!

2. (★★½) Sei $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

(a) $64(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(b) $-32(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.

(c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.

(d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

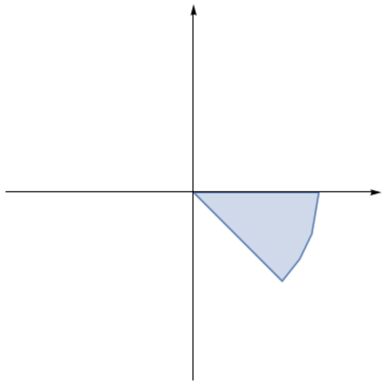
Siehe nächstes Blatt!

3. (★★) Es sei

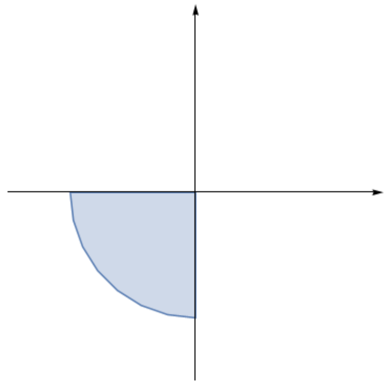
$$A := \left\{ re^{i\varphi} : r \in [0,1], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \right\} \subset \mathbb{C}$$

und es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Welche der folgenden Mengen entspricht $f(A)$?

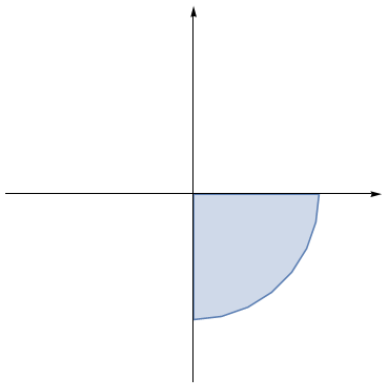
a)



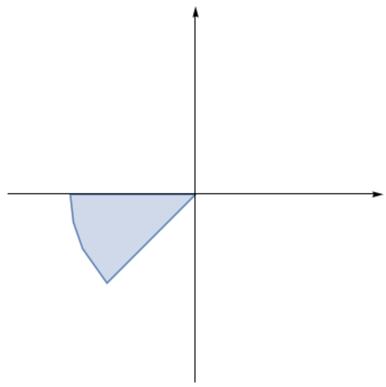
b)



c)



d)



(a) a)

(b) b)

(c) c)

(d) d)

Bitte wenden!

4. (★★) Was ist $(1+i)^{2000}$?

(a) $\sqrt{2}e^{500\pi i}$

(b) -2^{1000}

(c) $(2i)^{1000}$

(d) $2^{1000}e^{\frac{\pi i}{4}}$

(e) 2^{2000}

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★★)

a) Gegeben seien die komplexe Zahlen $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$ und $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Berechnen Sie Betrag und Argument von $z = \frac{z_1}{z_2}$.

b) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche folgende zwei Bedingungen gelten:

i) $\arg((1+i)^2) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7)$,

ii) $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{\exp(i\pi)}\right| \leq \left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| \leq |3+4i|$.

6. (★★★)

a) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ gilt $|w + z| < C$.

b) Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{16}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

7. (★★½) Zeigen Sie die folgenden trigonometrische Beziehungen:

a) $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$.

b) $\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$.