Serie 6

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 6.11.2019 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 6.11.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★½) Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Stimmt diese Überlegung?

(a) Ja.

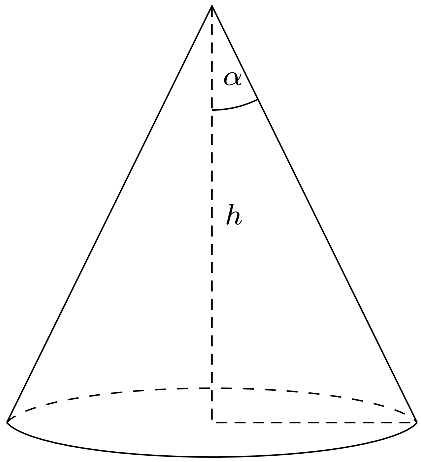
(b) Nein, da das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(c) Nein, da Zähler und Nenner des ersten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(d) Nein, da Zähler und Nenner des zweiten Bruchs für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 streben.

(e) Nein, da die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

2. (★★) In einem geraden Kreiskegel sei die Höhe h genau bekannt. Der halbe Öffnungswinkel α wird gemessen, wobei der Messfehler $\Delta\alpha$ ist. Wie wirkt sich dieser Messfehler bei Berechnung des Volumens $V(\alpha)$ des Kegels aus?



(a) Der absolute Fehler $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\tan(\alpha)\Delta\alpha$.

(b) Der absolute Fehler $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha$.

(c) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ hängt von h ab.

(d) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ ist proportional zu $\frac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$.

3. (★½) Die Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$.

(d) $f'(x) = x + x\ln x$.

Siehe nächstes Blatt!

4. (★★) Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist *richtig*?

(a) Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

(b) Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

(c) Ist $f' > 0$ auf (a,b), so ist f streng monoton wachsend.

(d) Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf (a,b).

5. (★★) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es seien $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

(a) f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(b) f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(c) f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a,b]$.

(d) f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a,b]$.

Bitte wenden!

6. (★★½) Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\tan x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-\cos(x)\right)^2}{x\cos(x)-\sin(x)}$.

7. (★★) Es sei x eine kleine Grösse. Finden Sie *lineare Näherungen* (d.h. die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0) für die folgenden Ausdrücke:

a) $f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - 1$

b) $f_2(x) = e^{1+x}$

c) $f_3(x) = (1000-x)^{\frac{1}{3}}$

d)* $f_4(x) = \prod\limits_{k=0}^{364} \left(1 - \frac{kx}{365}\right)$.

8. (★★) Die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse m_0 mit Zerfallsrate α. Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross α für ein neues, unbekanntes Material ist.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach 10 Sekunden mit einem Messfehler von $\leq 0{,}1$ Sekunden, also

$$m(10+\Delta t) = 1, \qquad |\Delta t| \leq 0.1$$

a) Bestimmen Sie die maximal und minimal möglichen α.

b) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $\Delta\alpha$ *ungefähr* proportional zu Δt und zu $\frac{1}{t^2}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass der relative Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ *ungefähr* proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.

d) Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion und vergleichen Sie das Resultat mit den echten Fehlern. Was stellen Sie fest?

9. (★★½)

a) Es sei eine stetige, in (a,b) differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

b) Beweisen Sie mittels Teilaufgabe (a) die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1,1]$.

Siehe nächstes Blatt!

c)* Wenn die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwar *stetig, aber nicht differenzierbar ist*, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges f an, so dass der Mittelwertsatz nicht gilt.