Serie 7

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf `https://echo.ethz.ch` gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 13.11.2019 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 13.11.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★★) Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt ...

(a) $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$

(b) $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$

(c) $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

(d) $e^{\sqrt{\ln x}} = o\left(x^{1/3}\right)$ für $x \to +\infty$

(e) $\sin^2(x)\ln^3(x) = o\left(\ln^3(x)\right)$ für $x \to +\infty$

Bitte wenden!

2. (★★) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x) + 2\sin(x)$.

(a) 2.61

(b) 1.73

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

3. (★★) Sei

$$\begin{aligned} f\colon [0,6] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

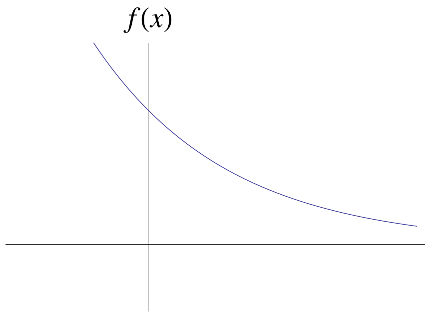
(a) $x = 1$ und $x = 4$ sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

(c) $x = 6$ ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

(d) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

4. (★⯪) Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



(a) Die erste Ableitung f' ist positiv.

(b) Die erste Ableitung f' ist negativ

(c) Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

(d) Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

Siehe nächstes Blatt!

5. (★★★)

a) Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx$$

im Punkt $(1,2)$ ein globales Maximum hat.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

auf dem Intervall $[a, b]$.

6. (★★★) Die Hyperbolische Funktionen sinh und cosh sind wie folgt definiert:

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, an denen beide Seiten definiert sind:

c) $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1.$

d) $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

e) $\operatorname{Arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f) $\operatorname{Arcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

7. (★★) Ordnen Sie die folgenden sechs Funktionen nach ihren Grössenordnungen, wenn $x \to +\infty$ strebt.

a) $\ln\left(\ln\left(x^2\right)\right)$ b) $\ln\left(e^x - x\right)$ c) x^2

d) $x^{1/5}$ e) $\ln\left(10\, x^{1/2}\right)$ f) e^{3x}

8. (★★) Für welche der untenstehenden Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $g(x) = O(e^x)$ mit $x \to +\infty$ und für welche gilt $e^x = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$?

(*Zur Erinnerung:* Es gilt $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$ falls $\lim\limits_{x \to +\infty} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \leq A$, wobei $A \in [0, +\infty)$ eine nicht-negative reelle Zahl ist.)

a) $g(x) = e^{x+4}$;

Bitte wenden!

b) $g(x) = e^x + 17x^{17}$;

c) $g(x) = e^{x^2}$;

d) $g(x) = 200e^{\frac{1}{x^3}}$;

e) $g(x) = x^x$.