

## Serie 9

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online auf <https://echo.ethz.ch> gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 27.11.2019 um 08:00 Uhr* ab.

**Bemerkung:** Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Die Sterne an den Aufgaben geben die Schwierigkeit an: Einfache Aufgaben, die direkte Anwendungen der Definitionen und Sätze sind werden mit (★) markiert. Zwei Sterne (★★) stehen für fortgeschrittene Anwendungen und Aufgaben mit drei Sternen (★★★) sind auf dem Niveau der Basisprüfung.

**Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben:** *Mittwoch, 27.11.2019* in der Vorlesung oder bis 12:15 am selben Tag ins Fach des Übungsassistenten im HG J 68.

**Homepage der Vorlesung:** <https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0261-G0L/>

---

### MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. (★) Es sei  $f$  die Funktion  $f(x) = xe^x + 7$ . Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von  $f$ ?

(a)  $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$ ;

(b)  $g(x) = xe^x - e^x + 7x$ ;

(c)  $g(x) = (x - 1)e^x$ ;

(d)  $g(x) = (x - 1)e^x + 7x + \pi^4$ .

**Bitte wenden!**

2. (★★) Es seien  $C, l > 0$ . Die Bernoullispirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\varrho(\varphi) = Ce^{l\varphi},$$

wobei  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

- (a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor  $\vec{r}(\varphi)$  eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor  $\dot{\vec{r}}(\varphi)$  ist konstant.
- (b) Die Differenz der  $x$ -Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven  $x$ -Achse ist konstant.
- (c) Der Quotient der  $x$ -Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven  $x$ -Achse ist konstant.
- (d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit  $C = l = 1$  ist die Kardiode.

3. (★) Es sei  $f$  die Funktion mit  $f(x) = \int_3^x \sin(t) dt$ . Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

- (a)  $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$ ;
- (b)  $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$ ;
- (c)  $f'(x) = \cos(x)$ ;
- (d)  $f'(x) = \sin(x)$ .

4. (★) Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

- (a)  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$
- (b)  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dt$
- (c)  $\int_b^a (g(x) - f(x)) dx$
- (d)  $\int_a^b (f(t) - g(t)) dt$

5. (★) Welche der folgenden Funktionen sind für  $x > 0$  monoton wachsend?

- (a)  $x \mapsto \int_0^x t dt$
- (b)  $x \mapsto \int_0^x t^2 dt$
- (c)  $x \mapsto \int_0^x \sin t dt$
- (d)  $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t dt$

**Siehe nächstes Blatt!**

6. (★★★) Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma}: t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion  $t \mapsto k(t)$  der Kurve  $\vec{\gamma}$  sowie den Radius  $r_0$  und das Zentrum  $z_0$  des Krümmungskreises an der Stelle  $t = 0$ .
- b) Dieser Kreis (mit festem Radius  $r_0$ ) rolle entlang  $\vec{\gamma}$  ab.<sup>1</sup> Bestimmen Sie das Zentrum  $\vec{z}(t)$  des Kreises mit Berührungspunkt  $\vec{\gamma}(t)$  sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve  $t \mapsto \vec{z}(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

7. (★★) Die Ebene Kurve  $K$  sei gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) := 2 \cos t + \cos 2t, \quad y(t) := 2 \sin t + \sin 2t \quad t \in [0, 2\pi].$$

- a) Skizzieren Sie die Kurve anhand von Achsenabschnittspunkten, deren Tangenten, sowie Punkten, wo die Tangente horizontal oder vertikal liegt.
- b) Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Kurve in folgende Geogebra-App eingeben:  
<https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#material/VSBerkaq>
- c) Berechnen Sie die Krümmung  $k(t)$  sowie die Parametrisierung der Evolute.
- d) Skizzieren Sie die Evolute anhand der in (a) gelisteten Eigenschaften.
- e) Überprüfen Sie wiederum Ihr Resultat, indem Sie Ihr Resultat in die App aus (b) eingeben und mit folgendem Evolutenrechner vergleichen:  
<https://www.geogebra.org/m/uzebkcz2#material/nbv3bk92>

8. (★★★) Die *Astroide* ist durch folgende implizite Gleichung gegeben

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

- a) Finde die Gleichung der Astroide in Polarkoordinaten (d.h.  $\varrho = f(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ).
- b) Für welche Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi]$  ist der Radius  $\varrho$  minimal?

9. (★★★) Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form  $y = -ax^2 + b$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , welche mit der  $x$ -Achse die Fläche  $\frac{4}{3}$  einschliessen.

---

<sup>1</sup>Falls Sie  $r_0$  bei a) nicht berechnet haben, können Sie  $r_0 = 1$  annehmen.