Diese Serie besteht aus Wiederholungsaufgaben zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, was Teil der Vorlesung Mathematik II war. Bei Bedarf sind auf der Vorlesungshomepage Zusammenfassungen zum Thema von Dr. Laura Keller verlinkt.

1.1. Lineare ODE mit konstanten Koeffizienten.

Finde die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen für $y(x)$, wobei ω eine reelle Konstante ist:

(a) $y'' - \omega^2 y = 0$,

(b) $y''(x) + \omega^2 y = 0$,

(c) $y'' + 3y' + 4y = \cos(2x)$,

(d) $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y'' + 8y = \mathrm{e}^{-2x}$,

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Erinnerung: Bei nicht-homogenen Gleichungen ist es meist von Vorteil, zuerst die homogene Gleichung zu lösen.

Hinweis: e^{-2x} ist eine Lösung der homogenen Gleichung in (d).

1.2. ODE 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten.

Löse die folgenden Differentialgleichungen für $y(x)$:

(a) $y' - x^3 y = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $y' + x^4 y = x^5 + 1$, $x \in \mathbb{R}$,

(c) $y' - y = \cos x$,

(d)* $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$,

(e)* $y\,y' - (1+y)x^2 = 0$.

Erinnerung: ODE 1. Ordnung löst man oft durch *Trennung der Variablen* oder durch Substitution, um eine äquivalente Gleichung einfacherer Form zu erhalten. Beachte, dass mit Separation der Variablen manchmal Lösungen verloren gehen wegen Division durch 0. Überprüfe diese potentiellen Lösungen einzeln.

Hinweis: Multipliziere die Gleichung in (b) mit $\mathrm{e}^{x^5/5}$.

Differentialgleichungen mit * markiert sind schwieriger zu lösen.

1.3. Anfangs- und Randwertprobleme.

Löse die folgenden Probleme:

(a) $\begin{cases} y' = 2\mathrm{e}^{2x} & \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' - 2x(2y-1) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 4y = 0 & \forall x \in (0, L) \; (L > 0 \text{ gegeben}), \\ y(0) = 0, \\ y(L) = 2. \end{cases}$

Hinweis: Bei (c) ist eine Fallunterscheidung nach L nötig.

1.4. Federpendel.

Ein Federpendel besteht aus einer Schraubenfeder und einem daran befestigten Massestück (mit Masse m), welches sich geradlinig längs der Richtung bewegen kann, in der der Feder sich verlängert oder verkürzt. Sei $K > 0$ die Federkonstante und $\omega^2 := K/m$, wobei ω die Frequenz ist. Sei $x(t)$ die Auslenkung der Masse als Funktion von t. Dann ist die Bewegungsgleichung des Federpendels gegeben durch

$$(\dagger) \quad \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \; t \in \mathbb{R}$$

Bestimme die Lösung der Differentialgleichung $(\dagger)$:

(a) welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2\omega$ erfüllt.

(b) welche die Randbedingungen $x(0) = 1, x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ erfüllt.

1.5. Challenge*.

Löse für $y(x)$:

$$y' = \frac{2}{x + e^y}.$$

Differentialgleichungen mit * markiert sind schwieriger zu lösen.