2.1. Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

Sei $r := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, wobei $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die folgenden Funktionen von $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\alpha \log r,\ r \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha \frac{1}{r^\beta},\ r \neq 0$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\beta > 0$ Konstanten sind.

Erinnern Sie sich, der Laplace-Operator $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$.

Benutzen Sie eine der obigen Funktionen, um die folgenden Gleichungen zu lösen:

(a) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

(b) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Tipp: In jedem Fall, müssen Sie α bzw. β bestimmen.

2.2. Evolutionsgleichungen

(a) Seien $c, k \in \mathbb{R}$, mit $c > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(t,x) = f(t)\sin(kx).$$

Berechnen Sie $u_{tt} - c^2 u_{xx}$. Für welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist u eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$?

Die Lösung, die Sie finden, heisst stehende Welle.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(t,x) = e^{at+bx}.$$

Berechnen Sie $u_t - cu_{xx}$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - cu_{xx} = 0$?

2.3. Klassifikation von PDEs.

Seien f und g differenzierbare Funktionen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ homogen linear, inhomogen linear oder nicht linear sind und bestimme die Ordnung. Im Falle einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung: Entscheiden Sie, ob die Gleichung elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.

(a) $u_t = \Delta u + u^2$, (*Reaktionsdiffusionsgleichung*)

(b) $\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$, (*Korteweg-de-Vries-Gleichung*)

(c) $2u_{xx} + u_x + 2u_{xy} + 2u_{yy} = f$,

(d) $4u_{xx} + 16u_y + u_{xy} + 6u_{yy} = 0$,

(e) $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$,

(f) $(x^2 - 2)u_{xx} + 4xyu_{xy} + (y^2 - 2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 16\}$.