3.1. Airy Gleichung

Betrachten Sie die folgende Airy Gleichung:

$$-u_t + u_{xxx} = 0.$$

Seien k die Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz. Für welche ω und k löst

$$u(t,x) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

die Gleichung, wobei A eine Konstante ist?

Berechnen Sie die Wellengeschwindigkeit $\frac{\omega}{k}$.

Bemerken Sie, dass die Wellengeschwindigkeit ω/k abhängig von der Wellenzahl k ist. Dies ist ein Beispiel einer ***dispersiver*** *Gleichung.*

3.2. Elementare PDE.

Finden Sie eine Lösung der Gleichungen:

(a) $u_{xy} - u_x = \sin y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

(b) $u_{tt} - 9u_{xx} = x + \sin^2 t,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$

3.3. Variablenwechsel.

Führen Sie den angegeben Variablenwechsel in den folgenden PDE durch und finden Sie die allemeinen Lösungen:

(a) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0,$

$$\text{Variablenwechsel} \begin{cases} s = x, \\ t = x - 2y. \end{cases}$$

(b) $-3u_{xx} + 4u_{xy} - u_{yy} + 6u_x - 2u_y = 0,$

$$\text{Variablenwechsel} \begin{cases} s = 3y + x, \\ t = x + y. \end{cases}$$

3.4. Anfangswertproblem.

Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - 3u_{xx} = 0 & \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x \sin x & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = \mathrm{e}^{2x} & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.5. Druckwelle.

Eine Druckwelle, verursacht durch eine Explosion, erfüllt die Gleichung

$$P_{tt} - 25P_{xx} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,,$$

wobei $P(x,t)$ den Druck zur Zeit t am Ort x bezeichnet. Die Anfangsbedingungen zur Zeit der Explosion $t = 0$ sind

$$P(x,0) = \begin{cases} 8 & |x| \leq 3\,, \\ 0 & |x| > 3 \end{cases}$$

$$P_t(x,0) = \begin{cases} 3 & |x| \leq 3\,, \\ 0 & |x| > 3\,. \end{cases}$$

Ein Gebäude steht am Punkt $x_0 = 12$ und hält einem Druck von $P = 9$ stand. Wird das Gebäude zusammenbrechen?