4.1. Fast eine Wellengleichung

Finden Sie die allgemeine Lösung von

$$\begin{cases} u_{ttx} - u_{xxx} = t^2 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u_x(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_{xt}(x,0) = \sin(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4.2. Abhängigkeitsgebiet und Einflussgebiet

Wir betrachten die folgende Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $a > 0$.

(a) Zeichnen Sie die Lösung $u(x,t)$ bei den Zeiten $t_0 = 0$, $t_1 = a/2$, $t_2 = a$, $t_3 = 3a/2$, $t_4 = 5a$.

(b) Zeichnen Sie die Abhängigkeitsgebiete der Punkte $(0,a)$, (a,a), und $(a+5,1)$, und vergleichen Sie diese mit dem Intervall $[-a,a]$ bei $t = 0$. Was ist der Wert von u bei $(x,t) = (a+5,1)$?

(c) Zeichnen Sie das Einflussgebiet des Intervalls $[-a,a]$.

4.3. Druckwelle II

Betrachten Sie noch einmal die Druckwelle P aus Serie 3, Übung 3.5, nämlich

$$\begin{cases} P_{tt} - 25P_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ P(x,0) = \begin{cases} 8, & |x| \leq 3 \\ 0, & |x| > 3 \end{cases} \\ P_t(x,0) = \begin{cases} 3, & |x| \leq 3 \\ 0, & |x| > 3 \end{cases} \end{cases}$$

(a) Für welche Punkte der Raumzeit ist $P(x,t)$ automatisch Null? (Mit Zeichnung.)

(b) Berechnen Sie $P(0,t)$ für alle $t \geq 0$.

(c) *(Asymptotische Verhalten bei $x = 0$ für $t \to \infty$).* Merken Sie, dass $P(0,t)$ ab einer bestimmten Zeit t_0 plötzlich einen konstanten Wert P_∞ annimmt. Was sind t_0 und P_∞?

(d) * *(Asymptotische Verhalten bei beliebigem x für $t \to \infty$).* Beweisen Sie, dass für jedes festen $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x,t) = P_\infty$$

für t gross genug. Das heisst, der "Druck" wird im ganzen Raum nach dem Abklingen des Schalls eine Konstante und nicht mehr Null. (Ob das physisch realistisch ist, weiss ich nicht.)