5.1. Charakteristisches Dreieck

Wir betrachten die folgende inhomogene Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \mathrm{e}^{-t} + \cos(x+2) & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie und zeichnen Sie das Charakteristische Dreieck an den punkten $(0,1)$, $(0,3)$ und $(2,4)$.

(b) Finde die Lösung des Problems mit Hilfe der Formel von d'Alembert.

5.2. Superpositionsprinzip

Betrachten Sie das inhomogene Problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos(x+t) & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin(x)/2 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Hinweis: Man vermeidet das Doppelintegral auf dem Charakteristischen Dreieck, wie folgt. Aufgrund unserer Erfahrung mit ODE wäre ein geeigneten Ansatz

$$v(x,t) = (\alpha t + \beta)(\gamma \cos(x+t) + \delta \sin(x+t)).$$

Leider erfüllt v die Anfangsbedingungen nicht ganz. Also schreibt man $u = v + w$, wobei v ist wie oben und die Konstanten sind so gut gewählt wie möglich, und w korrigiert die Unstimmigkeiten bei den Anfangsbedingungen von v. Am besten schreibt man die beiden untergeordeneten Cauchy-Probleme explizit.

5.3. Periodische Funktionen

Bestimmen Sie, welche der folgenden Funktionen periodisch sind, und berechnen Sie die kleinste Periode (falls möglich):

(a) $\sin(x/2) + \sin(x/3)$,

(b) $\tan(\sin(x))$,

(c) $\sin^2(x) - \cos^2(x)$,

(d) $\sin(x) + (x^2/2)\cos(x)$,

(e) $\sin(2x)\cos(2x)$.

5.4. Integration periodischen Funktionen

Sei $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine T periodische Funktion. Zeige, dass für alle $A \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^T f(x)dx = \int_A^{A+T} f(x)dx.$$

5.5. Orthogonalitätsrelationen

(a) Beweise die folgenden Relationen für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq n \\ 2\pi, & \text{falls } m = n. \end{cases}$$

(b) Beweise die nachstehenden Relationen für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot 1\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall m,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot 1\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = 0 \\ 0 & \text{falls } m \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall m, n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{falls } m = n \neq 0 \\ -\pi & \text{falls } m = -n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = n = 0 \\ \pi & \text{falls } m = \pm n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Tipp: für (b) kann man die bekannten Eulerschen Formeln benutzen:

$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}, \qquad \sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i} \qquad t \in \mathbb{R}.$$