6.1. Reelle Fourier-Reihen

Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihen der periodischen Fortsetzung der folgenden Funktionen:

(a) 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = \cos^2(4x) - \sin^2(2x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

(b) 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

6.2. Fourier-Reihen und numerische Reihen (Prüfung Februar 2012)

Sei $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung von f.

(b) Berechnen Sie (mithilfe von (a)) den Wert der Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}.$$

6.3. Gibbs'sches Phänomen

Betrachten Sie die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Fourier-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ von f an. (Aus der Vorlesung.)

(b) Die n-te Partialsumme der obigen Reihe ist durch

$$S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(jx)$$

definiert. Stellen Sie $S_n(x)$ graphisch dar für $n = 1, 3, 5, 7, 9$. Sie können Maple oder Mathematica benutzen, oder einen Online-Plotter wie Wolfram Alpha. Was passiert in der Nähe des Punktes $x = 0$, wenn n gross ist?

(c) Ungefähr wie hoch ist das Maximum von $S_n(x)$, wenn n gross ist? Um wieviel Prozent überschreitet $S_n(x)$ das Maximum von f? (Dieses sogenannte *Gibbs'sche Phänomen* passiert bei jeder Unstetigkeitsstelle einer Funktion f.)

6.4. Gerade und ungerade Fortsetzung

Sei $f(x) = x$ definiert auf $[0, \pi]$.

(a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechne ihre Fourier Reihen.

i) f_1 ist die gerade 2π periodische Fortsetzung von f,

ii) f_2 ist die ungerade 2π periodische Fortsetzung von f,

iii) $f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$,

iv) f_4 ist die π periodische Fortsetzung von f.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von a) die Gleichheit

$$\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$