7.1. Gerade und ungerade Funktion

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und $c_n \in \mathbb{C}$ Konstante, so dass

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

die (konvergente) Fourier-Reihe von $f(x)$ ist. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f(x)$ ist gerade genau dann, wenn $c_n = c_{-n}$.

(b) $f(x)$ ist ungerade genau dann, wenn $c_n = -c_{-n}$.

(c) $f(x)$ ist reell (d.h. $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$) genau dann, wenn $\overline{c_n} = c_{-n}$.

7.2. Fourier-Reihe I

Gegeben sei eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = |\sin(x)| \qquad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

(a) Finden Sie die komplexe Fourier-Reihe von $f(x)$.

(b) Leiten Sie aus **(a)** her die reelle Fourier-Reihe von $f(x)$. Besteht sie aus Sinus-Termen?

7.3. Fourier-Reihe II

Sei $f(x) = x^2/2$ für $x \in [0, 2]$.

(a) Berechnen Sie die reelle und die komplexe Fourier-Reihe der geraden 4-periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Berechnen Sie mithilfe von **(a)** – bei zwei Werten von x – die Grenzwerte von

$$\sum_{\substack{m>0 \\ m \text{ gerade}}} \frac{1}{m^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\substack{m>0 \\ m \text{ ungerade}}} \frac{1}{m^2}.$$

7.4. Eine numerische Reihe

Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Sei $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \cos(\alpha x), \qquad x \in (-\pi, \pi]$$

und sonst $f_\alpha(x + 2\pi) = f_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Graphen von $f_\pi(x)$ und $f_i(x)$. Seien die beiden stetig? Reell?

Erinnerung: $\cos(ix) = \cosh(x)$ und $\sin(ix) = i\sinh(x)$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f_\alpha(x)$ für beliebigen $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (fest).

Hinweis: Zweimal nach Teilen integrieren, um das Integral zu erstellen.

(c) Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2},$$

indem Sie spezielle Werte von α und x wählen.

(d) Was ist der numerische Wert der Summe auf 4 Dezimalstellen? Wieviel Terme hätte man addieren müssen, um auf diese Präzision zu kommen?

7.5. Challenge

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) = e^{x^2 - x}, \qquad x \in (-\pi, \pi].$$

Zu beweisen: unendlich viel von den Fourier-Koeffizienten von $g(x)$ sind nicht null.