8.1. L-periosche und 2L-periodische Fortsetzungen

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = e^x \quad \text{für} \quad x \in [0, \pi]\,.$$

Finden Sie die reelle Fourier-Reihe für die folgenden periodischen Fortsetzungen von $f(x)$:

(a) gerade 2π-periodisch,

(b) ungerade 2π-periodisch,

(c) π-periodisch.

Wie unterscheiden sie sich?

8.2. Wellengleichung mit Dirichlet-Randbedingung

Betrachten Sie die Wellengleichung auf einer beschränkten Definitionsmenge:

$$(\star) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & (x,t) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0, L], \end{cases}$$

wo f und $L > 0$ gegeben sind. Die Dirichletbedingung bewirkt Reflexion am Rand mit Umkehr-Wirkung.

(a) Sei F die *ungerade* $2L$-periodische Fortsetzung von f. Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(F(x+ct) + F(x-ct)),$$

eine ungerade $2L$-periodische Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass u, eingeschränkt auf den Streifen $[0, L] \times \mathbb{R}_+$, eine Lösung von $(\star)$ ist.

(c) (Neumann-Randbedingung) Die Randbedingung $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, heisst *Neumannbedingung*. Sie bewirkt Reflexion am Rand. Wie würden Sie vorgehen, um $(\star)$ zu lösen, falls die Dirichletbedingung durch die Neumannbedingung ersetzt wird?

8.3. Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletbedingung I

Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in [0,1],\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin^3(3\pi x) + 4\sin(4\pi x)\cos(4\pi x) & x \in [0,1]. \end{cases}$$

8.4. Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletbedingung II

Betrachten Sie das folgende Problem:

$$(\dagger) \quad \begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & x \in [-\pi,\pi],\ t \geq 0, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [-\pi,\pi], \end{cases}$$

mit dem Sawtooth

$$u_0(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{falls } x \in (0,\pi), \\ -\pi - x & \text{falls } x \in (-\pi,0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Lösung $u(x,t)$ von $(\dagger)$. (Parität!)

(b) Stellen Sie $u(x,t)$ graphisch dar für $t = 0$, 0.0001, 0.01, 0.1, 1, 10.

Hinweis: Sie können Maple oder Mathematica benutzen, oder einen Online-Dienst wie Wolfram-Alpha. Beispiel-Code für Mathematica:

```
Plot[ Sum[ x^n/(n!), {n,1,100} ], {x,0,4pi} ].
```

(c) (Asymptotisches Profil) Beschreiben Sie die Form von $u(\cdot,t)$, wenn $t \to \infty$. Können Sie diese Form erklären?