9.1. Wärmeleitungsgleichung mit Neumannrandbedingung

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe der π-periodischen Fortsetzung von $\sin(x)$. Konvergiert diese Fourierreihe gegen $\sin(x)$ in $[0, \pi]$? In $\mathbb{R}$? Begründen Sie deine Antwort.

(b) Mit der Methode der Separation der Variablen lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem mit homogen Neumannranbedingung:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+ \\ u_x(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \sin(x) & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(c) Das PDE-Modell in (b) beschreibt die Wärmeausbreitung in einem dünnen isolierten Stab. Berechnen Sie die Grösse

$$U(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

die das mittlere Temperatur des Stabs zur Zeit t darstellt. Was können Sie schliessen?

9.2. Wärmeleitungsgleichung mit inhomogener Dirichletrandbedingung

Lösen Sie das folgende Problem mit inhomogener Randbedingung:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = 1 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(1,t) = 2 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = x + \cos^2(\pi x) & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Hinweis: Man betrachtet zuerst eine partikuläre Lösung des Randwertproblems, ohne Rücksicht auf die Anfangsbedingung.

9.3. Inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit homogener Neumannrandbedingung

Lösen Sie das folgende Problem mit schwankender Wärmequelle:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = A\cos(\alpha t) & (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 1 + \cos^2(\pi x) & x \in [0,1] \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

wobei A und $\alpha > 0$ fest sind.

Hinweis: Man betrachtet zuerst eine partikuläre Lösung des Randwertproblems, ohne Rücksicht auf die Anfangsbedingung.

9.4. Separation der Variablen für die Wellengleichung

Betrachten Sie das folgende Problem:

$$(\dagger) \quad \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & x \in [-\pi, \pi],\ t \geq 0, \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x) & x \in [-\pi, \pi], \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Lösen Sie ($\dagger$) mit Separation der Variablen:

(a) für $f(x) = \cos(x/2) + \sin(x) + 3\sin(5x)$, $g(x) = 0$,

(b) für $f(x) = 0$, $g(x) = \cos(x/2) + \sin(x) + 3\sin(5x)$,

(c) für die Sägezahn

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{falls } x \in (0, \pi), \\ -\pi - x & \text{falls } x \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

mit $g(x) = 0$. Sie können die Fourier-Reihe für $f(x)$ aus der Aufgabe 8.4 entnehmen.

9.5. Polarkoordinaten

Eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$, kann in Polarkoordinaten ausgedrückt werden, d.h. man definiert $\tilde{u}(r, \phi) = u(x(r, \phi), y(r, \phi))$, wobei

$$\begin{cases} x = x(r, \phi) = r\cos\phi \\ y = x(r, \phi) = r\sin\phi. \end{cases}$$

(a) Drücken Sie die folgende Funktionen in Polarkoordinaten aus:

$$u_1(x, y) = x^2 + y^2, \qquad u_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad u_3(x, y) = \frac{x}{y}.$$

(b) Drücken Sie die folgende Funktionen in kartesischen Koordinaten aus:

$$\tilde{v}_1(r, \phi) = r^n, \qquad \tilde{v}_2(r, \phi) = \sin\phi\cos\phi, \qquad \tilde{v}_3(r, \phi) = \phi \quad (-\pi/2 < \phi < \pi/2),$$
$$\tilde{v}_4(r, \phi) = \phi \quad (\pi/2 < \phi < 3\pi/2).$$