10.1. Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Wir wollen hier einige wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation beweisen. Seien f, g Funktionen in $L^1(\mathbb{R})$. [1] Die Fouriertransformation von f wird mit $\mathcal{F}[f]$ oder $\hat{f}$ bezeichnet,

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

(a) Linearität. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\mathcal{F}[af + bg](\xi) = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi).$$

(b) Ableitung. Sei f so dass f' und $x\, f(x)$ auch in $L^1(\mathbb{R})$ sind. Beweise, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{f}(\xi) = (-i)\mathcal{F}\left[xf(x)\right](\xi),$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right](\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

(c) Höhere Ableitung. Sei jetzt $k \in \mathbb{N}_{>1}$ und f so dass $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ und $xf(x), x^2 f(x), \ldots, x^k f(x)$ auch in $L^1(\mathbb{R})$ sind. Beweise, dass

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\hat{f}(\xi) = (-i)^k \mathcal{F}\left[x^k f(x)\right](\xi),$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\right](\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

(d) Translation/Modulation. Sei $a \in \mathbb{R}$ und bezeichne $\tau_a f(t) = f(t-a)$. Beweise, dass

$$\mathcal{F}[\tau_a f](\xi) = \mathrm{e}^{-i\xi a}\hat{f}(\xi),$$

$$\tau_a \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[\mathrm{e}^{iax} f(x)](\xi).$$

(e) Faltung/Multiplikation. Sei $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\, dy$ die Faltung. Beweise, dass

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$$

$$\mathcal{F}[fg](\xi) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi).$$

[1] Eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gehört zu $L^1(\mathbb{R})$ wenn $\int_{\mathbb{R}} |h| < +\infty$.

(f) Zweimalige Transformation. Zeige, dass, wenn man die Fouriertransformation zweimal anwendet, dann gilt

$$\mathcal{F}[\hat{f}](y) = 2\pi f(-y).$$

(g) Integral. Sei $\varphi(x) = \int_a^x f(y)\,dy$, $a \in \mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{i\xi}\hat{f}(\xi).$$

(h) Streckung. Sei $\lambda > 0$. Bezeichne $\delta_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ und $\delta_{1/\lambda} f(x) = f(x/\lambda)$. Beweise, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_\lambda f](\xi) &= \frac{1}{\lambda}\delta_{1/\lambda}\hat{f}(\xi), \\ \delta_\lambda \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}\left[\delta_{1/\lambda} f(x)\right](\xi). \end{aligned}$$

Hinweis zu (b): Benutze partielle Integration und die Tatsache dass, wenn h in $L^1(\mathbb{R})$ ist, $\lim_{R\to\pm\infty} h(R) = 0$ gilt.

10.2. Fourier-Transformation

Sei $a > 0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}[f](\xi) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[f](-\xi)$$

und

$$\mathcal{F}[e^{iax}f](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi - a)$$

gilt.

(b) Berechnen Sie die umgekehrte Fourier-Transformierten der Funktion

$$h(\xi) = \mathrm{e}^{-a|\xi|}.$$

In der Tat, zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^{-1}[h](x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2 + a^2}$ gilt.

(c) Ableiten Sie die Fourier-Transformierten der Funktion

$$g(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}.$$

(d) Schliesslich, berechnen Sie die Fourier-Transformierten der Funktionen

$$f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-a|x|},$$

und

$$f_2(x) = \sin(2x + 1)\mathrm{e}^{-4(x+1)^2}.$$

10.3. <u>Wichtig</u>: der Laplace-Operator in Polarkoordinaten

Bemerkung: Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten wird in Zukunft, sowohl in den Übungen als auch in der Vorlesung, benutzt. Wenn wir eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$ betrachten, ist es möglich, diese in Polarkoordinaten:

$$\begin{cases} x = x(r, \phi) = r\cos(\phi) \\ y = x(r, \phi) = r\sin(\phi) \end{cases}$$

auszudrücken, d.h. $u(r, \phi) = u(x(r, \phi), y(r, \phi))$.

(a) Überprüfen Sie, mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt

$$\begin{aligned} \partial_r u(r, \phi) &= (\partial_x u)\cos\phi + (\partial_y u)\sin\phi \\ \partial_\phi u(r, \phi) &= -(\partial_x u) r\sin\phi + (\partial_y u) r\cos\phi. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein die folgende Relation für die partiellen Ableitungen $\partial_x u$ und $\partial_y u$:

$$\begin{pmatrix} \partial_r u \\ \partial_\phi u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}.$$

(b) Beweisen Sie, mit Hilfe einer Inversion der Matrix, dass in Komponentenschreibweise gilt

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \cos\phi(\partial_r u) - \frac{1}{r}\sin\phi(\partial_\phi u), \\ \partial_y u &= \sin\phi(\partial_r u) + \frac{1}{r}\cos\phi(\partial_\phi u). \end{aligned}$$

Berechnen Sie dann mit diesen Formeln und mit Hilfe der Kettenregel, die Ausdrücke $\partial^2_{xx} u$ und $\partial^2_{yy} u$ in Polarkoordinaten, das heisst

$$\partial^2_{xx} u = \partial_x(\partial_x u) = \cos\phi(\partial_r(\partial_x u)) - \frac{1}{r}\sin\phi(\partial_\phi(\partial_x u)) = ...$$

(c) Fassen Sie das Ergebnis zusammen, um zu folgern, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten lautet

$$\boxed{\Delta u(r, \phi) = \partial^2_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi} u.}$$