11.1. Fourier-Transformation, Ableitungen, und Stammfunktionen

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (1 - |x|^2)\,\chi_{[-1,1]}(x)$, wobei

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation.

(a) Berechnen Sie f' (welche ausserhalb der Punkte -1 und 1 definiert ist) und zeichnen Sie die Graphen von f und f'.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f')$.

(c) Berechnen Sie $\mathcal{F}(f)$ mithilfe von (b) und Aufgabe 10.1(g).

Warnung: Bei 10.1(g) wurden nötige Bedingungen ausgelassen. Angesichts 10.1(b) genügt es, zu 10.1(g) die Vorraussetzungen hinzuzufügen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 0$, $\phi(x) := \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$, und ϕ, $x\phi \in L^1(\mathbb{R})$. (Dann fällt a weg.)

11.2. Fourier-Transformation und gewöhnliche Differentialgleichungen

Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = e^{-|x|}$$

mithilfe der Fouriertransformation.

Hinweis. Berechnen Sie zuerst $\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)$ und benutzen Sie Aufgaben 10.1(b) und (e).

11.3. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern I

Lösen sie das folgende Problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

in den Fällen

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$,

(b) $f(x) = \cos(x)$.

(c) $f(x) = e^{-x^2/4a}/\sqrt{4\pi a}$. (Hinweis: quadratische Ergänzung.)

In jedem Fall, beschreiben Sie die Entwicklung der Wärmeverteilung $u(\cdot,t)$ in Worten.

11.4. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern II

Sei $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben durch $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(y) K(x-y,t)\, dy$, wobei K der Wärmeleitungskern ist und

$$f(x) = \begin{cases} T_1 & x \leq 0, \\ T_2 & x > 0, \end{cases}$$

wobei $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Die Funktion u stellt die Temperaturentwicklung in einem unendlichen Stab dar, der zum Zeitpunkt $t = 0$ aus zwei Teilen mit konstanten Temperaturen T_1 und T_2 besteht.

Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \to \infty} u(x,t)$ bei festem $t > 0$,

(b) $\lim_{x \to -\infty} u(x,t)$ bei festem $t > 0$,

(c) $\lim_{t \to \infty} u(x,t)$ bei festem $x \in \mathbb{R}$.

Was ist die Bedeutung von (a), (b) und (c) (geometrisch bzw. physisch)?