12.1. Laplace-Gleichung auf dem Rechteck Sei $R := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ das offene Einheits-Viereck, $\bar{R}$ dessen Abgeschlossene Hülle. Bestimmen Sie die Lösung $u : \bar{R} \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } R \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{auf } \partial R, \end{cases}$$

wobei

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ -\sin(2\pi y)\cos(2\pi y) & \text{falls} \quad x = 1. \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} x(x-1) & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 1. \end{cases}$$

(c) (Prüfung Februar 2012)

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ x^2 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{falls} \quad x = 1. \end{cases}$$

12.2. Laplace-Gleichung auf dem Kreis Wir betrachten das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) &= 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) &= 1 + 3x^4 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass $1 \leq u(x,y) \leq 4$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$.

(b) Man bestimme $u(0,0)$ mit der Poisson-Formel.

(c) Man bestimme u und schätze u ab (in dem man das Integral abschätzt).

12.3. Zwei harmonische Funktionen (Prüfung Februar 2016) Sei $B_1(0,0)$ die offene Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$. Seien $u_1, u_2 : \overline{B_1(0,0)} \to \mathbb{R}$ die Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{cases} \Delta u_i(x,y) &= 0 \qquad (x,y) \in B_1(0,0), \\ u_i(x,y) &= g_i(x,y) \qquad (x,y) \in \partial B_1(0,0), \end{cases}$$

für $i = 1, 2$, mit

$$g_1(x,y) := x^4 - 4xy^3 + y^4, \qquad g_2(x,y) := 4x^3y - 6x^2y^2.$$

Zeigen Sie, dass $u_1 \geq u_2$ auf $B_1(0,0)$ gilt.