**13.1. Laplace-Gleichung auf dem Kreis I** Löse die folgenden Probleme auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ für $u \in C^2(B_1(0), \mathbb{R})$. Schreibe die Lösungen sowohl in kartesischen- als auch in Polarkoordinaten.

**(a)**

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = (x^2+y^2)^2 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = 0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

*Hinweis:* Schreibe die Gleichung in Polarkoordinaten und versuche mit dem Ansatz $u(r,\vartheta) = v(r)$, d.h. mit einer Funktion, welcher von $\vartheta$ unabhängig ist, das Problem auf eine ODE zu reduzieren.

**(b)**

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = y + x^2 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

**(c)**

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) = 4x^3 - 3x & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

*Hinweis zu b) und c):* Wie in der Vorlesung gesehen, falls die Randwerte von der Form $f(\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta))$ sind, so ist die Lösung gegeben durch $u(r,\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta))$. (Dies gilt für den Einheitsball.)

**13.2. Laplace-Gelichung auf dem Kreis II** Wir wollen das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) &= 0, & \text{in } B_1(0), \\ u(x,y) &= 1 + 3x^4, & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

betrachten.

**(a)** Zeige, dass $1 \leq u(x,y) \leq 4$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 \leq 1$.

**(b)** Bestimme $u(0,0)$ mit der Poisson-Formel.

**(c)** Bestimme $u$ und schätze es explizit ab.

**13.3. Abhängigkeitsgebiet und Einflussgebiet** Wir betrachten die folgende Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

**(a)** Zeichnen Sie die Lösung $u(x,t)$ bei den Zeiten $t_0 = 0$, $t_1 = \pi/4$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = 3\pi/4$, $t_4 = 5\pi/2$.

**(b)** Zeichnen Sie die Abhängigkeitsgebiete der Punkte $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2)$, und $(\pi/2 + 10\pi, \pi)$, und vergleichen Sie diese mit dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ bei $t = 0$. Was ist der Wert von $u$ bei $(x,t) = (\pi/2 + 10\pi, \pi)$?

**(c)** Zeichnen Sie das Einflussgebiet des Intervalls $[-\pi/2, \pi/2]$.

**13.4. Fourier-Reihe** Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der ungerade $2\pi$-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ e^{\pi - x}, & \text{falls } \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

**13.5. Wärmeleitungsgleichung** Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t - 25u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(2x) + 7\sin(6x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

**13.6. Fourier Transformation (Prüfung Februar 2012)** Berechnen Sie die Fourier Transformation von

$$f(x) = x^2(1 - |x|)^+$$

für $x \in \mathbb{R}$. Wir benutzen die Notation $g(x)^+ := \max\{g(x), 0\}$.