VII Differentialgleichungen Teil 1

Laura Keller

22. November 2016

Einleitung

Unter einer Differentialgleichung verstehen wir eine Gleichung, in welcher die gesuchte Funktion sowie deren Ableitungen auftreten.

Beispiel:

$$y^{(4)}(x) - 4y^{(3)}(x) + 5y^{(2)}(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$$

x heisst unabhängige Variable
y heisst abhängige Variable

Klassifizierung von Differentialgleichungen

Wir werden im Folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe der folgenden Kriterien klassifizieren:

- Ordnung
- Linearität
- Homogenität

Odnung - Linearität - Homogenität

Eine Differentialgleichung der Form

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = s(x)$$

heisst lineare Differentialgleichung mit Koeffizienten $a_i(t)$.

Die Ordnung der Differentialgleichung ist die maximale Ordnung der vorkommenden Ableitungen.

Die Funktion $s(x)$ nennen wir Störfunktion.

Falls gilt $s(x) = 0$, wird die Differentialgleichung homogen, andernfalls inhomogen.

Spezialfall

Den Spezialfall, dass alle Funktionen $a_i(x)$ in der Differentialgleichung konstante Funktionen sind, nennen wir eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

$\rightarrow$ Besonders betrachten werden wir

- lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- Differentialgleichungen erster Ordnung

Lineare, homogene Differentialgleichungen

2 Wichtige Eigenschaften linearer, homogener Diff.-gl.

1) Superpositionsprinzip

Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung, so ist auch

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der gleichen Differentialgleichung.

2) Fundamentallösungen

Eine lineare, homogene Differentialgleichung der Ordnung n besitzt n Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, so dass die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben ist durch

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x), \quad C_1, \cdots, C_n \in \mathbb{R}$$

Diese Lösungen werden Fundamentallösungen genannt.

Lösen einer linearen, homogenen Differentialgleichung

Unser Ziel ist eine Lösungsformel für eine Differentialgleichung der Form

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1} u^{(n-1)}(x) \cdots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0$$

Der Ansatz $u(x) = e^{\lambda x}$ (Eulerscher Ansatz) führt uns auf die charakteristische Gleichung

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

respektive das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

Satz über die Lösung einer linearen, homogenen Differentialgleichung

Schlussendlich können wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1} u^{(n-1)}(x) \cdots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0$ wie folgt angeben $(a_i \in \mathbb{R})$:

- Falls alle r Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms reell sind und Multiplizität m_i haben, gilt

$$u(x) = \sum_{i=0}^{r} \left(\sum_{p=0}^{m_i-1} C_{ip} x^p e^{\lambda_i x} \right)$$

- Falls wir r reelle Nullstellen und s **Paare** komplexer Nullstellen $(a_j \pm i b_j)$ mit jeweils Multipliziät m_i haben, gilt

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=0}^{r} \left(\sum_{p=0}^{m_i-1} C_{ip} x^p e^{\lambda_i x} \right) \\ &+ \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{q=0}^{m_j-1} \left(A_{jq} x^q e^{a_j x} \sin(b_j x) + B_{jq} x^q e^{a_j x} \cos(b_j x) \right) \right) \end{aligned}$$

In der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung n.-ter Ordnung tauchen n Konstanten auf.

Wollen wir also aus der allgemeinen Lösung - einer Familie von Funktionen - eine Funktion auswählen, so müssen wir n Informationen vorgeben.

$\rightarrow$ Zwei Strategien

Erste Strategie

Wir geben die Informationen an zwei unterschiedlichen Stellen vor, z.B. im Fall $n = 2$

$$u(t_0) = u_0, \quad u(t_1) = u_1, \qquad t_0 \neq t_1.$$

Dies nennt man ein Randwertproblem.

Zweite Strategie

Alternativ kann man an einer Stelle die Informationen vorgeben, z.B. im Fall $n = 2$

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = v_0.$$

Dies nennt man ein Anfangswertproblem.