VII Differentialgleichungen
Teil 2

Laura Keller

13. Dezember 2016

Techniken zum Lösen von Differentialgleichungen

➜ Diff.-gl.erster Ordnung:

- Trennung der Variablen
- Substitution
- Variation der Konstanten (lineare, inhomogene Diff.-gl.)

➜ Lineare, inhomogene Diff.-gl. beliebiger Ordnung:

- Geeignete Ansätze für die partikuläre Lösung

Trennung der Variablen

Grundidee:
Alle Ausdrücke mit der unabhängigen Variablen auf eine Seite bringen und alle Ausdrücke mit der abhängigen Variablen auf die andere Seite der Gleichung bringen.

Anschliessend beide Seiten (unbestimmt) integrieren.

Dieses Verfahren eignet sich besonders für Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

Substitution

i) Lineare Substitution

Falls eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(ax + by + c), \quad mit\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, lässt sich diese durch die lineare Substitution

$$u = ax + by + c$$

in eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen überführen.

Bemerkung

Aus der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = y' = f(ax + by + c)$ erhalten wir nach linearer Substitution

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(u)$$

Auf der rechten Seite dieser Differentialgleichung kommt die unabhängige Variable x nicht mehr explizit vor.

Eine solche Differentialgleichung nennen wir autonom.

ii) Substitution bei in den Variablen homogenen Diff.-gl.

Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

nennen wir homogen in den Variablen.

Eine solche Differentialgleichung lässt sich mit Hilfe der Substitution

$$u = \frac{y}{x}$$

in eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen überführen.

Lineare inhomogene Differentialgleichungen

Falls eine inhomogene Differentialgleichung

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = s(x) \neq 0$$

gegeben ist, heisst

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0$$

die dazugehörige homogene Differentialgleichung.

Wichtige Eigenschaft linearer, inhomogener Diff.-gl.

Ist $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung und $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung, so ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung.

Variation der Konstanten

Gegeben ist eine inhomogene, lineare Differentialgleichung.

Dann erhalten wir einen Ansatz für die partikuläre Lösung, indem wir in der allgemeinen Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung die auftretende Konstante durch eine Funktion in der unabhängigen Variablen ersetzen.

Diesen Ansatz nennt man Variation der Konstanten.

Beispiel

Gegeben ist die lineare, inhomogene Differentialgleichung

$$y' - y = x$$

Die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' - y = 0$ lautet

$$y_h(x) = Ke^x$$

Der Ansatz für die gesuchte partikuläre Lösung lautet also

$$y_p(x) = K(x)e^x$$

Einige Hinweise zum Ansatz für die partikuläre Lösung

- Falls die Störfunktion ein Polynom n-ten Grades ist, wählen wir als Ansatz für die partikuläre Lösung ein Polynom vom gleichen Grad.
- Falls die Störfunktion eine Schwingung ist, wählen wir als Ansatz für die partikuläre Lösung eine Schwingung der gleichen Frequenz.
- Falls die Störfunktion das Produkt eines Polynoms und einer Exponentialfunktion ist, wählen wir als Ansatz für die partikuläre Lösung ein Produkt eines Polynom vom gleichen Grad mit einer Exponentialfunktion mit gleichem Exponent.