1.1. Lineare ODE mit konstanten Koeffizienten.

(a) Setzen wir $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \omega^2 \,,$$

welches die beiden Nullstellen

$$\lambda_1 = \omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\omega$$

besitzt. Somit ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} \,,$$

mit Konstanten A, $B \in \mathbb{R}$. Die Lösung kann auch als

$$y(x) = C \sinh(\omega x) + D \cosh(\omega x) \,, \quad C \,,\ D \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

(b) Setzen wir $y(x) = e^{\lambda x}$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 \,,$$

welches die beiden Nullstellen

$$\lambda_1 = i\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i\omega$$

besitzt. Somit ist die allgemeine reelle Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) \,, \quad A \,,\ B \in \mathbb{R} \,.$$

(Die komplexe Lösung wäre

$$y(x) = Ce^{i\omega x} + De^{-i\omega x}$$

für $C, D \in \mathbb{C}$.)

(c) Wir suchen zuerst eine allgemeine Lösung des homogenen Problems und danach eine partikuläre des inhomogenen Problems. Mit Superposition kriegen wir dann die Gesamtlösung.

Das charakteristische Polynom des homogenen Problems lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 4$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-3 \pm i\sqrt{7}\right) .$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y_h(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + Be^{-\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) .$$

Die partikuläre Lösung ermitteln wir, indem wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

in die DGl einsetzen:

$$-6A\sin(2x) + 6B\cos(2x) = \cos(2x) .$$

Mit Koeffizientenvergleich ist somit die partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{1}{6}\sin(2x)$ und damit die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + Be^{-\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \frac{1}{6}\sin(2x) .$$

(d) Das charakteristische Polynom des homogenen Problems ist:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 8 = 0.$$

Raten und Polynomdivision liefern zweimal die Nullstelle -2 und dann ein quadratisches Polynom, das mit Standardmethoden aufgelöst werden kann. Insgesamt ergibt sich

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 8 = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i),$$

also die Nullstellen $1 + i$, $1 - i$ und -2, wobei -2 eine doppelte Nullstelle ist. Damit hat die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung die Gestalt

$$y(x) = Ae^x\cos(x) + Be^x\sin(x) + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x},\ \ A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems kann man mit einem Ansatz suchen. Der naheliegende Ansatz wäre αe^{-2x}, da dies allerdings eine Lösung des homogenen Problems ist, wird dieser Ansatz nicht funktionieren. Ebenso verhält es sich mit $\alpha x e^{-2x}$. In solch einem Fall ist der Ansatz $\alpha x^2 e^{-2x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ vielversprechend. Tatsächlich ergibt Einsetzen, dass

$$\Big(\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^3}{dx^3} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 8\Big)(\alpha x^2 e^{-2x}) = 20\alpha e^{-2x}.$$

Folglich muss $\alpha = 1/20$ sein und $\frac{x^2}{20}e^{-2x}$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit gegeben durch

$$y(x) = Ae^x \cos(x) + Be^x \sin(x) + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x} + \frac{x^2}{20}e^{-2x},$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ frei wählbar sind.

1.2. ODE 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten.

(a) Nehmen wir an, dass die Lösung an einem Punkt $y \neq 0$ ist, so folgt mittels Separation:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^3 y; \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= x^3\,\mathrm{d}x; \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int x^3\,\mathrm{d}x + C \quad (C \in \mathbb{R});
\end{aligned}$$

und somit

$$\ln|y| = \frac{x^4}{4} + C \Rightarrow |y(x)| = e^{\frac{1}{4}x^4 + C} = Ke^{\frac{1}{4}x^4}.$$

Wir bemerken, dass die konstante Lösung $y(x) = 0$ auch gültig ist. Deshalb ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = Ke^{\frac{1}{4}x^4}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(b) Multiplikation der Gleichung mit der strikt positiven Funktion $e^{\frac{x^5}{5}}$ führt zu

$$e^{\frac{x^5}{5}} y'(x) + x^4 e^{\frac{x^5}{5}} y(x) = e^{\frac{x^5}{5}}(x^5 + 1).$$

Bemerke, dass die linke Seite gemäß der Produktregel auch als $\left(e^{\frac{x^5}{5}} y\right)'$ geschrieben werden kann. Für den Term auf der rechten Seite kann durch Integration eine Stammfunktion bestimmt werden. Oder aber man bemerkt

$$e^{\frac{x^5}{5}}(x^5 + 1) = x \cdot (x^4 e^{\frac{x^5}{5}}) + 1 \cdot e^{\frac{x^5}{5}} = (xe^{\frac{x^5}{5}})',$$

wieder mit der Produktregel. Es folgt also, dass $e^{\frac{x^5}{5}} y(x) - xe^{\frac{x^5}{5}}$ eine konstante Funktion ist. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = Ce^{-\frac{x^5}{5}} + x,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden darf.

(c) Wir multiplizieren beide Seiten mit $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}$, um zu erhalten:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x}y'(x) - \mathrm{e}^{-x}y = \mathrm{e}^{-x}\cos x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\cos x\\ \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^{x}\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x + C\mathrm{e}^{x} \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral wird durch partielle Integration berechnet:

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x),$$

somit erhalten wir die Lösung(en): $y(x) = -\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + C\mathrm{e}^{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(d) Wir sehen, dass die konstanten Funktionen $y \equiv 1$ und $y \equiv -1$ Lösungen der DGl sind. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + C, \quad C \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Lösung(en):

$$y(x) = 1, \qquad y(x) = -1, \qquad y(x) = \sin\left(\arcsin x + C\right), C \in \mathbb{R}.$$

Die nicht konstanten Lösungen können äquivalent als $y(x) = x\cos C + (\sqrt{1-x^2})\sin C$ geschrieben werden.

(e) Wir sehen, dass die konstante Funktion $y \equiv -1$ Lösung der DGl ist. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung den Variablen erhalten wir:

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y)x^2 \Rightarrow \int \frac{y}{1+y}\,\mathrm{d}y \ = \int x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{d}x,$$

somit erhalten wir die implizite Relation für die nicht konstanten Lösungen der DGl:

$$y - \log|1+y| = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.3. Anfangswert- und Randwertprobleme.

(a) Die allgemeine Lösung der DGl können wir durch direkte Integration bekommen:

$$y' = 2\mathrm{e}^{2x} \Rightarrow y(x) = \int 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + C \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung verlangt $2 = y(0) = 1 + C$ und somit $C = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1.$$

(b) Wir umschreiben die Gleichung als:

$$y' - 4xy = -2x.$$

Multiplikation der Gleichung mit der Funktion e^{-2x^2} gilt:

$$e^{-2x^2}y' - e^{-2x^2}4xy = -e^{-2x^2}2x.$$

Wir können die linke Seite gemäß der Produktregel als $(e^{-2x^2}y)'$ geschrieben. Ausserdem haben wir

$$(e^{-2x^2}y)' = -e^{-2x^2}2x.$$

Somit erhalten wir, dass $e^{-2x^2}y = \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$ ist. Multiplikation dies Gleichung mit e^{2x^2} führt zu:

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}.$$

Die Anfangsbedingung verlangt $0 = y(0) = \frac{1}{2} + C$ und somit $C = -\frac{1}{2}$. Somit ist die Lösung:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x^2}.$$

(c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = 0$ hat die folgende Form:

$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x).$$

Die Randbedingungen verlangen

$$0 = y(0) = B,$$
$$2 = y(L) = A\sin(2L) + B\cos(2L).$$

Da nun aber $B = 0$ ist, lautet die zweite Gleichung $A\sin(2L) = 2$. Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung für A, wenn $\sin(2L) \neq 0$ ist, das heisst, wenn $2L \neq \pi n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist. Wir haben also: Für $L = \frac{\pi}{2}n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ besitzt das Problem keine Lösung. Für alle anderen $L \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung des Randwertproblems gegeben durch

$$y(x) = \frac{2}{\sin(2L)}\sin(2x).$$

Eine Probe zeigt, dass dies auch tatsächlich eine Lösung ist.

1.4. Federpendel Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x_{all}(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2\omega$ folgt:

$$\begin{aligned} x(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 1, \\ \dot{x}(0) = 2\omega \quad &\Rightarrow \quad -C_1\omega \sin(0) + C_2\omega \cos(0) = C_2\omega = 2\omega. \end{aligned}$$

Somit gilt $C_1 = 1$ und $C_2 = 2$. Die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = \cos(\omega t) + 2\sin(\omega t).$$

(b) Mit den Randbedingungen $x(0) = 1$ und $x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} x(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 1, \\ x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + C_2 \sin(\frac{\pi}{2}) = C_2 = 1. \end{aligned}$$

Somit gilt $C_1 = C_2 = 1$. Die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t).$$

1.5. Challenge Wir lösen die Gleichung für der umgekehrt Funktion $x(y)$. Weil $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$ ist, dann gilt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(x + e^y).$$

Folglich erhalten wir

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}e^y.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\frac{1}{2}y}$. Somit gilt, dass die linke Seite als $(xe^{-\frac{1}{2}})'$ geschrieben und dann gilt durch Integration:

$$(xe^{-\frac{1}{2}y})' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}y} \Rightarrow xe^{-\frac{1}{2}y} = \frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{2}y}dy = e^{\frac{1}{2}y} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung für $x(y)$ ist:

$$x(y) = e^y + Ce^{\frac{1}{2}y}.$$

Jetzt brauchen wir $y(x)$ zu finden. Sei $z(x) = e^{\frac{1}{2}y(x)}$. Die Gleichung ist

$$x = z(x)^2 + Cz(x).$$

Wir lösen diese Gleichung nach $z(x)$. Wirklich haben wir zwei Lösungen

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 + 4x}\right),$$

für alle $x \geq -\frac{1}{4}C^2$. Folglich gilt zwei Lösungen $y(x)$:

$$y(x) = \log\left(\frac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2 + 4x}\right)\right)^2,$$

für alle $x \geq -\frac{1}{4}C^2$, dass die Gleichung erfüllen.