2.1. Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

(a) Weil der Bereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist, dann $n = 2$. Wir auswählen $u = \alpha \log r$ und wir berechnen Δu. Sei $i \in \{1,2\}$. Folglich gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial \log r}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\partial x_i} = \alpha \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} x_i.$$

Weiter berechnen wir $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \alpha \frac{\partial \frac{1}{x_1^2+x_2^2} x_i}{\partial x_i} = -\alpha \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} 2x_i^2 + \alpha \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Somit können wir Δu jetzt berechnen:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \alpha \left(-\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} 2x_1^2 + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} 2x_2^2 + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = 0.$$

Wir schliessen, dass $\Delta u = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

Wenn $u = \alpha \dfrac{1}{r^\beta}$ ist, dann $\Delta u \neq 0$. In der Tat,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial r^{-\beta}}{\partial x_i} = -\alpha\beta \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{(\beta+1)/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} x_i = -\alpha\beta \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\beta/2+1}} x_i.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= -\alpha\beta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\beta/2+1}} x_i \right) \\
&= -\alpha\beta \left(-\tfrac{1}{(x_1^2+x_2^2)^{\beta+2}} (\beta/2 + 1)(x_1^2 + x_2^2)^{\beta/2} 2x_i^2 + \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\beta/2+1}} \right) \\
&= -\alpha\beta \left(-(\beta/2 + 1) \tfrac{1}{(x_1^2+x_2^2)^{\beta/2+2}} 2x_i^2 + \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\beta/2+1}} \right).
\end{aligned}$$

Wenn wir Δu berechnen, erhalten wir

$$\Delta u = -\alpha\beta \left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\beta/2+1}} (2 - (\beta + 2)) \right) = \alpha\beta^2 \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\beta/2+1}}.$$

Damit ist $\Delta u \neq 0$ für alle $\beta > 0$, $\alpha \neq 0$.

(b) Weil der Bereich $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ist, dann $n = 3$. Wir auswählen $u = \alpha \frac{1}{r^\beta}$ und wir berechnen Δu. Sei $i \in \{1, 2, 3\}$. Wir können die obigen Berechnungen für $n = 3$ benutzen. Folglich gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\alpha\beta \left(-(\beta/2+1) \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\beta/2+2}} 2x_i^2 + \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\beta/2+1}} \right),$$

und

$$\Delta u = -\alpha\beta \left((3-(\beta+2)) \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\beta/2+1}} \right).$$

Somit ist $\Delta u = 0$ genau dann, wenn $\beta = 1$ ist.

Wenn $u = \alpha \log r$ ist, dann erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\alpha \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2} 2x_i^2 + \alpha \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

und

$$\Delta u = \alpha \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Damit verschwindet Δu nicht, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

2.2. Evolutionsgleichungen

(a) Wir setzen unsere Funktion u in die Wellengleichung ein:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f''(t)\sin(kx) + c^2 f(t) k^2 \sin(kx) \\ &= (f''(t) + c^2k^2 f(t))\sin(kx). \end{aligned}$$

Damit $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, muss f

$$f''(t) + (kc)^2 f(t) = 0$$

erfüllen. Diese ODE hat charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + (kc)^2 = 0,$$

welches die Nullstellen $\lambda = ikc$ und $\lambda = -ikc$ besitzt. Daher kann f als

$$f(t) = A\cos(kct) + B\sin(kct) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

(b) Es gilt, dass

$$u_t - cu_{xx} = ae^{at+bx} - cb^2e^{at+bx} = e^{at+bx}(a - cb^2)$$

ist. Somit gilt die Wärmeleitungsgleichung $u_t - cu_{xx} = 0$ genau dann, wenn $a = cb^2$.

2.3. Klassifikation von PDEs

(a) Nichtlinear (u^2), 2. Ordnung

(b) eine nichtlineare ($u \cdot \partial u/\partial x$) PDE 3. Ordnung ($\partial^3 u/\partial x^3$).

(c) eine inhomogene (f) lineare PDE 2. Ordnung. Die Gleichung ist elliptisch, denn:

$$2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0.$$

(d) Linear, homogen, 2. Ordnung, elliptisch, da $4 \cdot 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0$.

(e) eine inhomogene (g) lineare PDE 2. Ordnung. Die Gleichung ist hyperbolisch, denn:

$$(1 - x^2)(1 - y^2) - (-xy)^2 = 1 - x^2 - y^2 < 0,$$

auf dem Gebiet Ω.

(f) Linear, nicht homogen, 2. Ordnung. Die Determinante der betreffenden Matrix ist:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)(y^2 - 2) - 4x^2y^2 &= -2(x^2 + y^2) - 3x^2y^2 + 4 \\ &\leq -32 - 3x^2y^2 + 4 < 0 \quad \text{in } \Omega,\end{aligned}$$

somit ist die PDG hyperbolisch.