3.1. Airy Gleichung

Wir berechnen $-u_t + u_{xxx}$. Wirklich haben wir,

$$-u_t + u_{xxx} = +iA\omega e^{i(kx-\omega t)} + Ai^3k^3e^{i(kx-\omega t)}.$$

Wenn u die Airy Gleichung löst, gilt

$$0 = (i\omega - ik^3)Ae^{i(kx-\omega t)}.$$

Es gilt genau dann, $\omega - k^3 = 0$. In der Tät, $\omega = k^3$. Somit ist die Wellengeschwindigkeit $\frac{\omega}{k} = k^2$ und

$$u(t,x) = Ae^{ik(x-kt)}.$$

3.2. Elementare PDE

(a) Beachten Sie die Funktion $z(x,y) = u_x$. Weil $u_{xy} - u_x = \sin y$ ist, gilt

$$z_y - z = \sin y.$$

Die allgemeinen Lösungen z sind:

$$z(x,y) = e^y \left(\int_0^y e^{-s} \sin s ds + c_1(x) \right)$$

wobei c eine Funktion von x ist. Somit folgt

$$z(x,y) = -\frac{1}{2}(\sin y + \cos y) + e^y c_1(x).$$

Wir müssen nicht die allgemeinen Lösungen finden. Wählen $c_1 = 0$. Daraus erhalten wir:

$$z(x,y) = -\frac{1}{2}(\sin y + \cos y)$$

und es gibt eine Funktion c_2, so dass

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}(\sin y + \cos y)(x + c_2(y)),$$

gilt. Wählen $c_2 = 0$. Somit ist

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}(\sin y + \cos y)x$$

eine Lösung.

(b) Wir müssen nicht die allgemeine, sondern nur irgendeine Lösung der ODE finden. Dazu suchen wir beliebige Lösungen von

$$\begin{aligned} v_{tt} - 4v_{xx} &= \sin^2(t), \\ w_{tt} - 4w_{xx} &= x \end{aligned}$$

und setzen $u = u + w$.

Eine Lösung der ersten PDE erhalten wir durch zweimaliges Integrieren von $\sin^2(t)$ nach t. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t &= -\cos(t)\sin(t) + \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\cos(t)\sin(t) + \int (1 - \sin^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\cos(t)\sin(t) + t - \int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\int \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(-\cos(t)\sin(t) + t\right)$ und somit ist

$$v(t) = \int \frac{1}{2}\left(-\cos(t)\sin(t) + t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\cos^2(t) + t^2\right]$$

eine Lösung der ersten PDE. Eine Lösung der zweiten PDE ist einfach. Zuerst berechnen wir

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.$$

Somit ist

$$w(x) = -\frac{1}{4}\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{24}x^3$$

eine Lösung der zweiten PDE. Wie oben erwähnt ist gemäss dem Superpositionsprinzip

$$u(x,t) = v + w = \frac{1}{4}\left[\cos^2(t) + t^2\right] - \frac{1}{24}x^3$$

eine Lösung der betrachteten PDE.

3.3. Variablenwechsel.

(a) Mit der Variablensubsitution

$$\begin{cases} s &= x\,, \\ t &= t - 2y \end{cases}$$

folgt für $v(s(x,y),t(x,y)) = u(x,y)$, dass

$$\begin{aligned} u_x &= u_s\frac{\partial s}{\partial x} + u_t\frac{\partial t}{\partial x} = u_s + u_t \\ u_y &= -2u_t \end{aligned}$$

durch die Kettenregel erhalten wir. Daraus berechnen wir weiter

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt} \\ u_{xy} &= -2u_{st} - 2u_{tt} \\ u_{yy} &= 4u_{tt} \end{aligned}$$

Somit folgt, dass die partielle Differentialgleichung

$$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0$$

gleichwertig mit $u_{ss} = 0$ ist. Die allgemeinen Lösungen sind: $c_1(t)s + c_2(t)$, und mit x, y Variablen:

$$u(x,y) = c_1(x-2y)x + c_2(x-2y).$$

(b) Mit der Variablensubsitution

$$\begin{cases} s &= 3y + x\,, \\ t &= x + y \end{cases}$$

folgt für $v(s(x,y),t(x,y)) = u(x,y)$, dass

$$\begin{aligned} u_x &= u_s\frac{\partial s}{\partial x} + u_t\frac{\partial t}{\partial x} = u_s + u_t \\ u_y &= u_s\frac{\partial s}{\partial y} + u_t\frac{\partial t}{\partial y} = 3u_s + u_t \end{aligned}$$

durch die Kettenregel erhalten wir. Daraus berechnen wir weiter

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{ss} + 2u_{st} + u_{tt} \\ u_{xy} &= 3u_{ss} + 4u_{st} + u_{tt} \\ u_{yy} &= 9u_{ss} + 6u_{st} + u_{tt} \end{aligned}$$

Somit folgt, dass die partielle Differentialgleichung

$$-3u_{xx} + 4u_{xy} - u_{yy} + 6u_x - 2u_y = 0$$

gleichwertig mit $4(u_{st} + u_t) = 0$ ist. Damit beachten Sie die Funktion $z(t,s) = u_t$ und lösen $z_s + z = 0$. Die allgemeinen Lösungen sind: $c_1(t)e^{-s}$, wobei c_1 eine Funktion von t ist. Somit folgt, dass

$$u(t,s) = e^{-s}\left(\int_0^t c_1(v)dv + c_2(s)\right)$$

gilt, wobei c_2 eine Funktion von s ist. Mit x, y Variablen:

$$u(x,y) = e^{-3y-x}\int_0^{x+y} c_1(v)dv + e^{-3y-x}c_2(3y+x).$$

3.4. Anfangswertproblem. Für die Wellengleichung

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = & 0 & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\,, \\ u(x,0) & = & f(x) & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) & = & g(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

ist die Lösung durch die Formel von d'Alembert gegeben:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds\,.$$

In unserem Fall ist $c = \sqrt{3}$, $f(x) = x\sin x$ und $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und die Lösung ist somit

$$u(x,t) = \frac{(x+\sqrt{3}t)\sin(x+\sqrt{3}t) + (x-\sqrt{3}t)\sin(x-\sqrt{3}t)}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{x-\sqrt{3}t}^{x+\sqrt{3}t} \mathrm{e}^{2\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Erinneren Sie die trigonometrischen Identitäten:

$$\sin a + \sin b = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$$

und

$$\sin a + \sin b = 2\cos((a+b)/2)\sin((a-b)/2).$$

Wir können diese Identitäten verwenden, um

$$\begin{aligned} &(x+\sqrt{3}t)\sin(x+\sqrt{3}t) + (x-\sqrt{3}t)\sin(x-\sqrt{3}t) = \\ &= x\left(\sin(x+\sqrt{3}t) + \sin(x-\sqrt{3}t)\right) + \sqrt{3}t\left(\sin(x+\sqrt{3}t) - \sin(x-\sqrt{3}t)\right) \\ &= 2x\sin(x)\cos(\sqrt{3}t) + 2\sqrt{3}t\cos(x)\sin(\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

zu erhalten. Folglich haben wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= x\sin(x)\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}t\cos(x)\sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\xi}}{2}\right]_{x-\sqrt{3}t}^{x+\sqrt{3}t} \\ &= x\sin(x)\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}t\cos(x)\sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{3}t} - \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}t}}{2}\right)\right) \\ &= x\sin(x)\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}t\cos(x)\sin(\sqrt{3}t) + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{3}}\sinh(2\sqrt{3}t). \end{aligned}$$

3.5. Druckwelle. Wir verwenden wieder die Formel von d'Alembert. Hier ist jedoch $c = 5$ und auch f und g müssen gemäss Aufgabenstellung angepasst werden. Die Lösung am Ort $x_0 = 12$ ist zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$P(12, t) = \frac{1}{2}\left[f(12 + 5t) + f(12 - 5t)\right] + \frac{1}{10}\int_{12-5t}^{12+5t} g(s)\, ds\,,$$

wobei

$$f(s) = \begin{cases} 8 & |s| \le 3\,, \\ 0 & |s| > 3 \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(s) = \begin{cases} 3 & |s| \le 3\,, \\ 0 & |s| > 3\,. \end{cases}$$

Wir berechnen

$$\int_{12-5t}^{12+5t} g(s)\, ds = H(12 + 5t) - H(12 - 5t)\,,$$

wobei

$$H(s) = \begin{cases} 3s & |s| \le 3\,, \\ 9 & s > 3\,, \\ -9 & s < -3\,. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass

$$f(12 + 5t) = 0 \quad \text{und} \quad |f(12 - 5t)| \le 8 \quad \forall t > 0$$

und

$$|H(s)| \le 9 \quad \forall s \in \mathbb{R}\,.$$

Daraus schliessen wir, dass für jedes t gilt

$$\begin{aligned} |P(12, t)| &\le \frac{1}{2}|f(12 - 5t)| + \frac{1}{10}\left[|H(12 + 5t)| + |H(12 - 5t)|\right] \\ &\le 4 + \frac{18}{10} = 5.8 < 9 \end{aligned}$$

damit wird das Gebäude dem Druck standhalten.