4.1. Fast eine Wellengleichung

Die Problem für u impliziert, dass $z(x,t) = w_x(x,t)$ ist eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} z_{tt} - z_{xx} &= t^2 && x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ z(x,0) &= 0 && x \in \mathbb{R} \\ z_t(x,0) &= \sin(x) && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

das ein gewöhnliches Anfangswertproblem für die Wellengleichung ist. Es ist möglich, die Formel von d'Alembert direkt anzuwenden, aber hier wollen wir noch einmal das Superpositionsprinzip darstellen. Eine partikulare Lösung der PDE ist offensichtlich

$$v(x,t) = \frac{1}{12} t^4.$$

Daraus folgt, dass $w(x,t) = z(z,t) - v(z,t)$ löst

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= 0 && x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ w(x,0) &= 0 && x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,0) &= \sin(x) && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mittels der Formel von d'Alembert können wir w bestimmen:

$$w(z,t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin(s) \, \mathrm{d}s = -\frac{1}{2} \Big(\cos(x+t) - \cos(x-t) \Big).$$

Folglich ist, dass

$$z(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = -\frac{1}{2} \Big(\cos(x+t) - \cos(x-t) \Big) + \frac{1}{12} t^4.$$

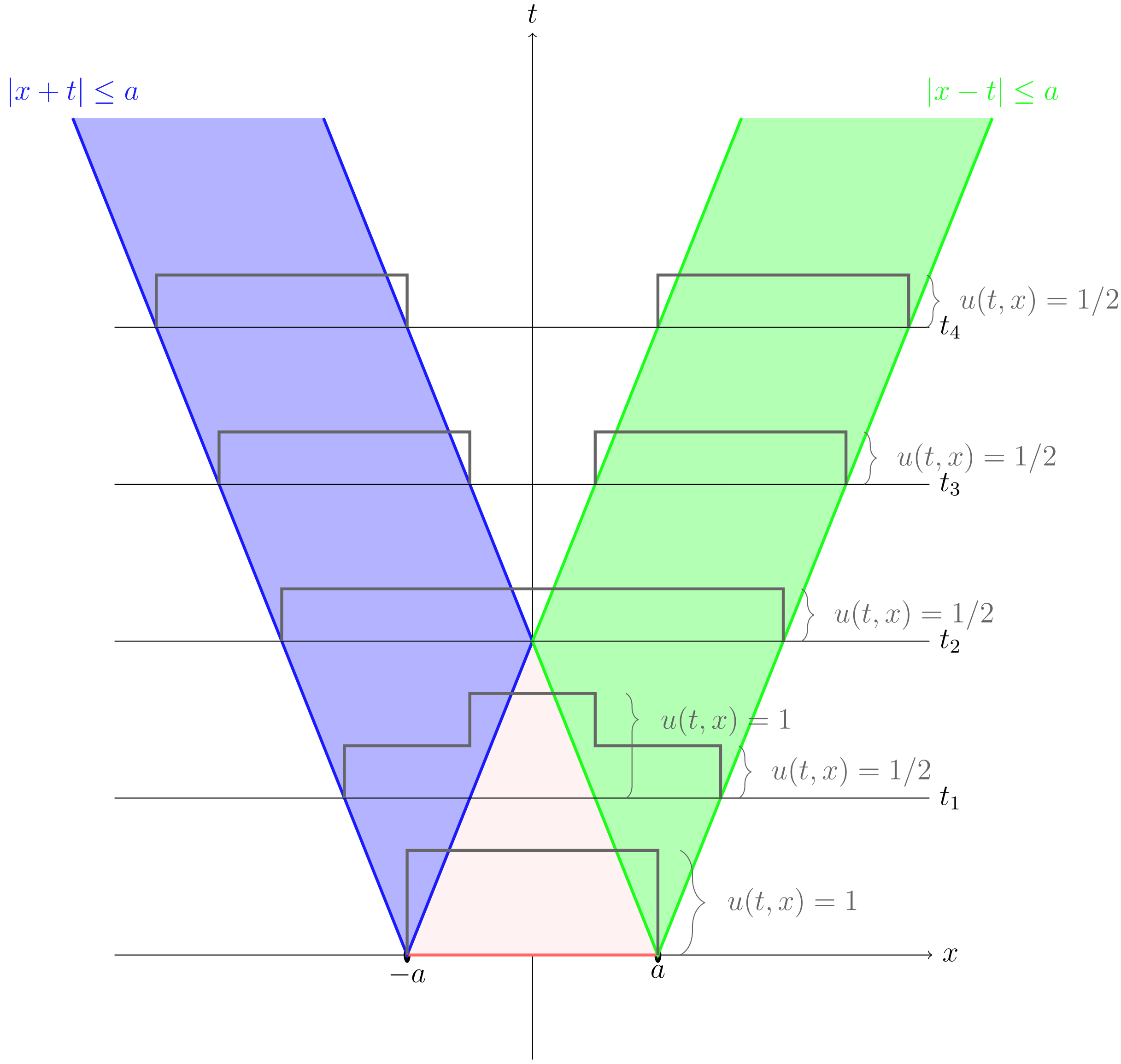
Schliesslich folgt, da $z(x,t) = w_x(x,t)$, dass die allgemeine Lösung unseres Problems ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^x z(\xi,t) \, \mathrm{d}\xi + u(0,t) \\ &= \int_0^x \left(-\frac{1}{2} \Big(\cos(x+t) - \cos(x-t) \Big) + \frac{1}{12} t^4 \right) \mathrm{d}\xi + \underbrace{u(0,t)}_{=:C(t)} \\ &= -\frac{1}{2} \Big(\sin(x+t) - \sin(x-t) \Big) + \frac{1}{12} t^4 x + C(t), \end{aligned}$$

wobei $C \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine *beliebige* Funktion ist.

4.2. Abhängigkeitsgebiet und Einflussgebiet

(a)

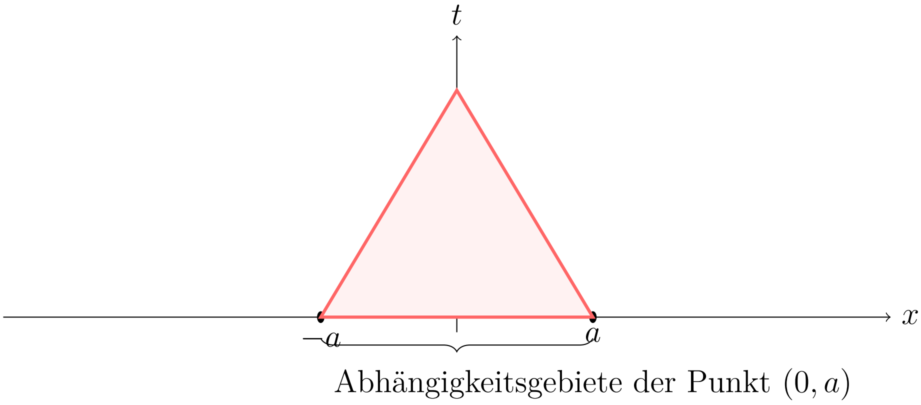


In grau haben wir die Werte von $u(t, x)$ mit d'Alembert-Formel

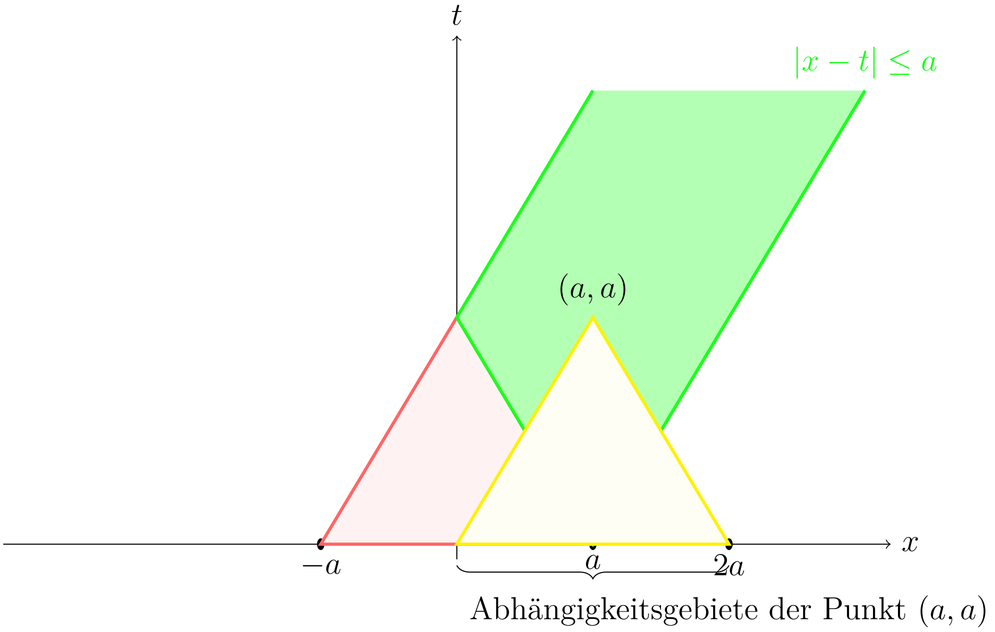
$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u(x+t,0) + u(x-t,0))$$

dargestellt.

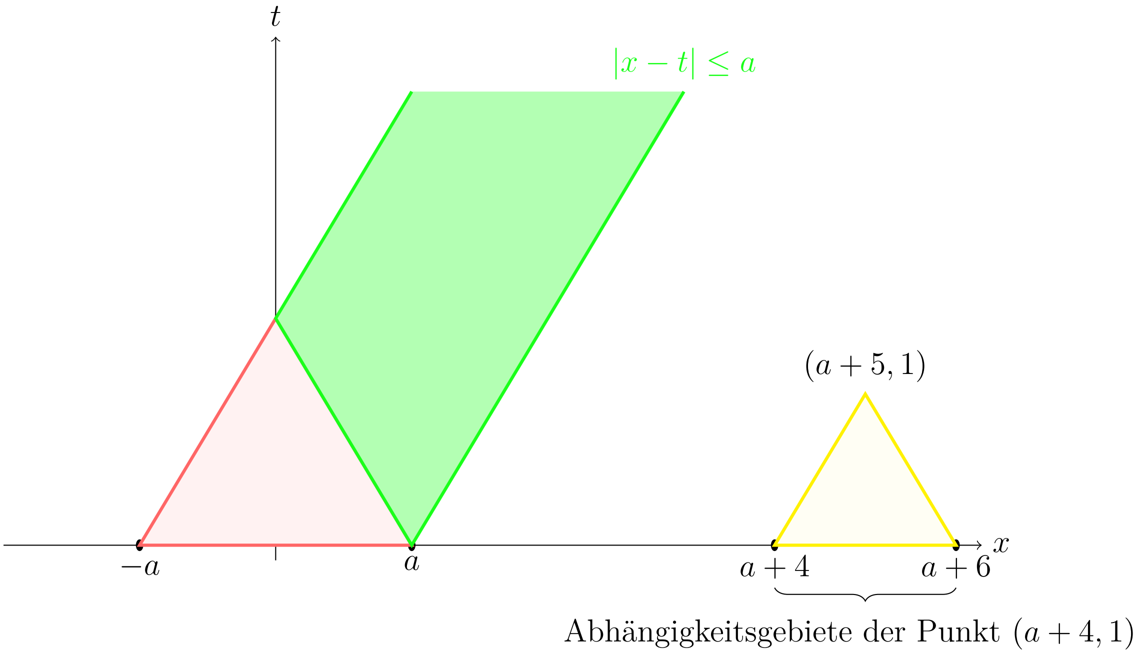
(b) Das Intervall $[-a, a]$ ist die Abhängigkeitsgebiete der Punkt $(0, a)$.



Das Intervall $[0, 2a]$ ist die Abhängigkeitsgebiete der Punkt (a, a).



Das Intervall $[a+4, a+6]$ ist die Abhängigkeitsgebiete der Punkt $(a+5, 1)$.



Weil $[-a, a] \cap [a+4, a+6] = \emptyset$ ist, gilt $u(a+5, 1) = 0$.

(c) Sehen Sie das Bild von **(a)**. Die rot, blau und grün Gebiete sind das Einflussgebiet des Intervall $[-a, a]$.

4.3. Druckwelle II

Von Lösung Serie 3, Aufgabe 3.5, haben wir:

$$P(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+5t) + f(x-5t)\right] + \frac{1}{10}\int_{x-5t}^{x+5t} g(s)\, ds\,,$$

wobei

$$f(s) = \begin{cases} 8 & |s| \leq 3\,, \\ 0 & |s| > 3 \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(s) = \begin{cases} 3 & |s| \leq 3\,, \\ 0 & |s| > 3\,. \end{cases}$$

Ausserdem gilt:

$$\int_{x-5t}^{x+5t} g(s)\, ds = H(x+5t) - H(x-5t)\,,$$

wobei

$$H(s) = \begin{cases} 3s & |s| \leq 3\,, \\ 9 & s > 3\,, \\ -9 & s < -3\,. \end{cases}$$

(a)

Wir müssen (x,t) finden, so dass $P(x,t)=0$. Wir haben mehrere Fälle:
1. $|x+5t|\leq 3$ und $|x-5t|\leq 3$. Für dieses Gebiet, haben wir $f(x+5t)=8$, $f(x-5t)=8$, und $H(x+5t)=3(x+5t)$, $H(x-5t)=3(x-5t)$. Somit gilt $P(x,t)=8+3t$. Wenn $P(x,t)=0$ ist, dann gilt $t=-\frac{8}{3}<0$. Weil $t\geq 0$ ist, erhalten wir dass für jedes (x,t) von dieses Gebiet $P(x,t)\neq 0$ ist.

2. $|x+5t|>3$ und $|x-5t|\leq 3$. Wenn $x+5t>3$ ist, gilt $P(x,t)=4+\frac{1}{10}(-3(x-5t)+9)$. Somit ist $x-5t=3+\frac{40}{3}>3$, wenn $P(x,t)=0$. Daraus gibt keine (x,t) von dieses Gebiet so dass $P(x,t)=0$ ist. Ähnlich $x+5t<-3$.

3. Ähnlich für $|x+5t|\leq 3$ und $|x-5t|>3$, gibt keine (x,t) mit $P(x,t)=0$.

Wir erhalten dass $P(x,t)=0$ ist genau dann $x+5t>3$ und $x-5t>3$ oder $x+5t<-3$ und $x-5t<-3$ sind.

(b)

Wir berechnen:

$$P(0,t)=\begin{cases}8+3t, & 5t\leq 3\\ 18/10, & 5t>3\end{cases}$$

(c) $P_\infty=18/10$, $t_0=5/3$.

(d) Für t gross genug haben wir $x+5t>3$ und $x-5t<-3$. Somit gilt

$$P(x,t)=\frac{18}{10}=P_\infty$$

wenn t gross genug ist ($t>3/5-x/3$ und $t>x/3+3/5$).