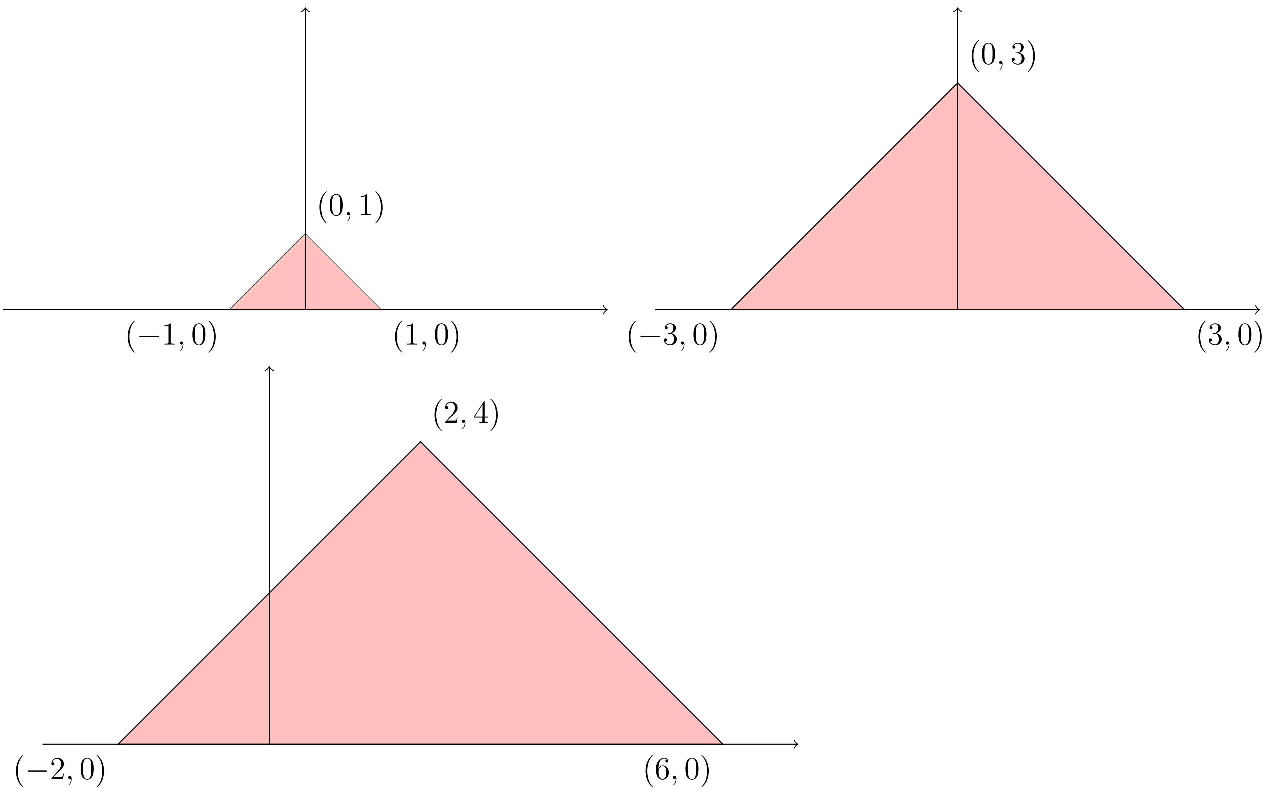
5.1. Charakteristisches Dreieck

(a) Das charakteristische Dreieck $\Delta = \Delta(c, x, t)$ hat die Ecken

$$(x - ct, 0), \quad (x, t), \quad (x + ct, 0).$$

Somit haben die Dreiecke in unserem Fall $c = 1$ die folgende Gestalt:



(b) Wir benutzen die Formel von d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int_{\Delta} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

wobei Δ das Dreieck mit den Ecken (x, t), $(x - ct, 0)$ und $(x + ct, 0)$ bezeichnet. In unserem Fall ist $c = 1$, $f(s) = s^2$, $g(s) = s$ und $F(x, t) = \mathrm{e}^{-t} + \cos(x + 2)$. Damit folgt

$$u(x,t) = x^2 + t^2 + tx + \frac{1}{2}\int_{\Delta} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Da gilt es:

$$(\xi,\tau) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le \tau \le t, \\ x - (t-\tau) \le \xi \le x + (t-\tau), \end{cases}$$

kÃ¶nnen wir auf folgende Weise das Doppelintegral bestimmen:

$$\begin{aligned}\int_\Delta F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \mathrm{e}^{-\tau} + \cos(\xi+2)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t 2(\mathrm{e}^{-\tau}(t-\tau) + 2\cos(2+x)\sin(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &= 2(t+\mathrm{e}^{-t}-1-\cos(x+2)(\cos t-1)).\end{aligned}$$

Schlussendlich ist die Lösung

$$u(x,t) = x^2 + tx + t^2 + t + \mathrm{e}^{-t} - 1 - \cos(x+2)(\cos t - 1)\,.$$

5.2. Superpositionsprinzip Um das Problem auf ein homogenes zu reduzieren, müssen wir eine partikuläre Lösung von

$$v_{tt} - v_{xx} = \cos(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

finden. Aufgrund unserer Erfahrung mit ODE, wir machen den Ansatz

$$v(x,t) = (\alpha t + \beta)(\gamma\cos(x+t) + \delta\sin(x+t))$$

wobei α, β, γ and δ Konstanten sind. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t) =& \alpha\Big(-\gamma\sin(x+t) + \delta\cos(x+t)\Big) + (\alpha t+\beta)\Big(-\gamma\cos(x+t) - \delta\sin(x+t)\Big) \\ &+ \alpha\Big(-\gamma\sin(x+t) + \delta\cos(x+t)\Big), \\ v_{xx}(x,t) =& (\alpha t+\beta)\Big(-\gamma\cos(x+t) - \delta\sin(x+t)\Big), \end{aligned}$$

was zu

$$v_{tt} - v_{xx} = 2\alpha\Big(\gamma\sin(x+t) + \delta\cos(x+t)\Big) \overset{!}{=} \cos(x+t)$$

führt. Daraus schliessen wir, dass $\alpha = 1/2$, $\gamma = 0$ und $\delta = 1$. Alles in allem:

$$v(x,t) = \frac{1}{2} t\sin(x+t).$$

Wir definieren $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ und bemerken, dass w folgendes Problem löst:

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= 0 & x\in\mathbb{R},\ t>0\,, \\ w(x,0) &= x & x\in\mathbb{R}\,, \\ w_t(x,0) &= \tfrac{1}{2}\sin(x) & x\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Mit der Formel von d'Alembert folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\left[(x-t)+(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \frac{1}{2}\sin(s)\,ds \\ &= x + \frac{1}{4}\left[\cos(x-t) - \cos(x+t)\right] . \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung u vom ursprünglichen Problem gegeben durch

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \frac{1}{2} t \sin(t+x) + x + \frac{1}{4}\left[\cos(x-t) - \cos(x+t)\right] .$$

5.3. Periodische Funktionen

(a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ist periodisch mit Periode 4π und $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ ist periodisch mit Periode 6π. Daraus folgt, dass $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ Periode $(\mathrm{kgV}\{4,6\})\pi = 12\pi$ hat. Wir können das kontrollieren:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x+12\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+12\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{x}{2} + 6\pi\right) + \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right) . \end{aligned}$$

(b) Da $\sin(x)$ 2π-periodisch ist folgt, dass auch $\tan(\sin(x))$ 2π-periodisch ist.

(c) Da $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$ π-periodische sind, folglich ist (wie in (a)), dass $\sin^2(x) - \cos^2(x)$ π-periodisch ist. *Alternativ*: aus der Beziehung

$$\sin^2(x) - \cos^2(x) = -\cos(2x)$$

folgt, dass $\sin^2(x) - \cos^2(x)$ π-periodisch ist.

(d) Der Term $\frac{x^2}{2}$ verhindert, dass die Funktion periodisch ist.

(e) Aus der Beziehung

$$\sin(2x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$$

folgt, dass $\sin(2x)\cos(2x)$ $\frac{\pi}{2}$-periodisch ist.

5.4. Integration periodischen Funktionen Wir nehmen an, dass $A \geq 0$, der Fall $A < 0$ ist ähnlich.

$$\int_A^{A+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{T+A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Durch einen Variablenwechsel $y = x - T$, und da f T-periodisch ist, erhalten wir, dass

$$\int_T^{T+A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A f(y+T)\,\mathrm{d}y = \int_0^A f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Somit

$$\int_A^{A+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.5. Orthonormale Funktionen. Wir beachten zuerst, dass für $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, gilt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \cos\frac{2k\pi x}{T}\,dx = \frac{T}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{T}\Big|_a^b = 0,\\
&\int_a^b \sin\frac{2k\pi x}{T}\,dx = -\frac{T}{2k\pi}\cos\frac{2k\pi x}{T}\Big|_a^b = 0.
\end{aligned}$$

Die Fälle, die e_0 involvieren ergeben sich dadurch sofort, wir können also im Folgenden annehmen, dass $n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
e_m \cdot e_n &= \frac{2}{T}\int \cos\frac{2n\pi x}{T}\cos\frac{2m\pi x}{T}\,dx\\
&= \frac{1}{T}\int \cos\frac{2(n+m)\pi x}{T} + \cos\frac{2(m-n)\pi x}{T}\\
&= 0 + \frac{1}{T}\begin{cases}\int 1 & m = n\\ 0 & m \neq n\end{cases}\\
f_m \cdot f_n &= \frac{2}{T}\int \sin\frac{2m\pi x}{T}\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx\\
&= \frac{1}{T}\int \cos\frac{2(m-n)\pi x}{T} - \cos\frac{2(n+m)\pi x}{T}\\
&= \frac{1}{T}\begin{cases}\int 1 & m = n\\ 0 & m \neq n\end{cases} + 0\\
e_m \cdot f_n &= \frac{2}{T}\int \cos\frac{2m\pi x}{T}\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx\\
&= \frac{1}{T}\int sin\frac{2(n-m)\pi x}{T} + \sin\frac{2(n+m)\pi x}{T}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung auch für $n = m$ gilt, da $\sin 0 = 0$.