6.1. Reelle Fourier-Reihen

(a) Aus der Beziehungen $2\cos^2(4x) - 1 = \cos(8x)$ und $1 - 2\sin^2(2x) = \cos(4x)$ erhalten wir unmittelbar

$$a_4 = 1/2, \quad a_8 = 1/2 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \quad \text{falls} \quad n \neq 4, 8,$$

und weiter

$$b_n = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(b) Da x^3 ungerade ist, gilt $a_k = 0 \quad \forall k$. Es bleibt

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(kx)\, dx$$

zu berechnen. Mittels partieller Integration berechnen wir:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(kx)\, dx = \frac{2(-1)^k(6-\pi^2k^2)}{k^3} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Somit is die Fourier-Reihe

$$x^3 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k(6-\pi^2k^2)}{k^3}\sin(kx).$$

6.2. Fourier-Reihen und numerische Reihen

Siehen Sie das Lösungsblatt der Prüfung von Februar 2012
`https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0373-00L/vergangene-prufungen/ExamSolution_2012-02.pdf`

6.3. Gibbs'sches Phänomen

(a) Weil $f(x)$ ungerade 2π-periodische ist, dann gilt die Fourier-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$. Wir müssen b_n berechnen:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx.$$

Somit gilt $b_n = \frac{1}{n\pi}\left(\cos(nx)|_{x=0}^{x=\pi} - \cos(nx)\ |_{x=-\pi}^{x=0}\right) = \frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi)-1) = \frac{2}{n\pi}((-1)^n-1)$. Wir erhalten, dass

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist. Wir schlissen, dass die Fourier-Reihe von $f(x)$, $\sum\limits_{n \text{ ungerade}} \frac{4}{n\pi}\sin(nx)$ ist.

(b) Benutzen Sie sich die folgenden Codes:

$$Plot[Sum[2/(n\ pi)((-1)^n - 1)\sin(nx), \{n, 1, 1\}], \{x, -pi, pi\}]$$

$$Plot[Sum[2/(n\ pi)((-1)^n - 1)\sin(nx), \{n, 1, 3\}], \{x, -pi, pi\}]$$

$$Plot[Sum[2/(n\ pi)((-1)^n - 1)\sin(nx), \{n, 1, 5\}], \{x, -pi, pi\}]$$

$$Plot[Sum[2/(n\ pi)((-1)^n - 1)\sin(nx), \{n, 1, 7\}], \{x, -pi, pi\}]$$

und

$$Plot[Sum[2/(n\ pi)((-1)^n - 1)\sin(nx), \{n, 1, 9\}], \{x, -pi, pi\}].$$

Einschieben Sie die obigen Codes hier: `https://www.wolframalpha.com/`, oder Mathematica. Merken Sie, dass Nähe $x = 0$, $f(x)$ nicht gleich die Fourier-Reihe ist. Wenn n gross ist, dann ist Nähe $x = 0$ $S_n(x)$ grösser als 1, wenn $x < 0$ ist und kleiner als -1, wenn $x \geq 0$ ist.

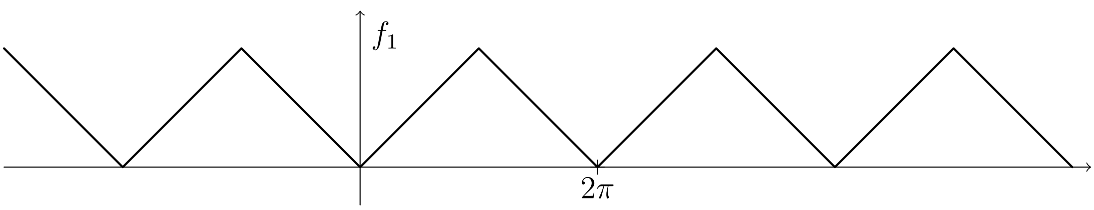
(c) Von Wolfram-alpha, erhalten wir durch

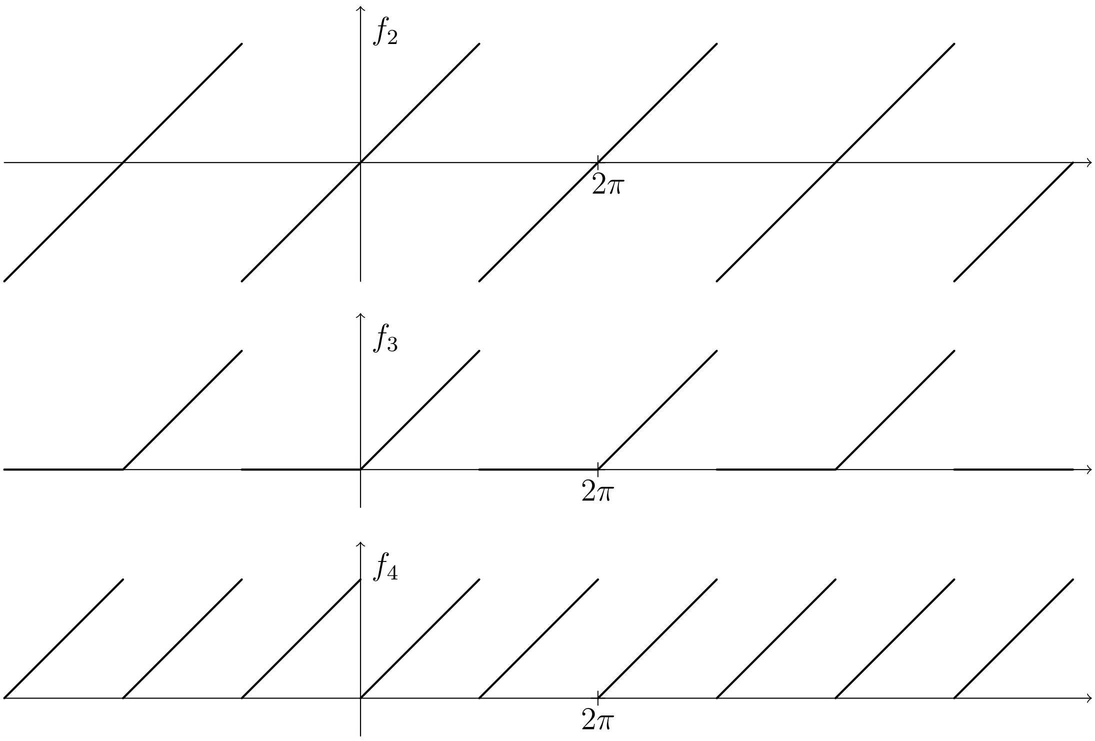
$$MaxValue[FourierSinSeries[-Unitstep[x], x, 11], x]$$

dass das Maximum von S_n zirka 1.18 ist, wenn n gross ist. Dies bedeutet, dass S_n das Maximum von $f(x)$ bei 18 Prozent überschreitet.

6.4. Gerade und ungerade Fortsetzung

(a) Die Graphen der f_i sehen wie folgt aus:





i) Die gerade Erweiterung f_1 hat die Periode $T = 2\pi$. Da die Funktion f_1 gerade ist gilt $b_n = 0$. Weiter berechen wir

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi,$$

und

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

Damit ist die zu $f_1(x)$ assozierte Fourierreihe

$$f_1(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nx)\,.$$

ii) Die ungerade Erweiterung f_2 hat die Periode $T = 2\pi$. Für ungerade Funktionen gilt $a_n = 0$ und wir berechen

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-x\cos(nx)}{n}\bigg|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\bigg|_0^\pi\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}
$$

iii) Die Funktion $f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ist 2π periodisch und mit $i)$ und $ii)$ erhalten wir die Fourier Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{a_0(f_1) + a_0(f_2)}{2} = \frac{\pi}{4}, \\
a_n &= \frac{a_n(f_1) + a_n(f_2)}{2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \\
b_n &= \frac{b_n(f_1) + b_n(f_2)}{2} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}
$$

iv) Da die Funktion f_4 die Periode $T = \pi$ hat, gilt

$$
a_0 = \frac{2}{T}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \pi.
$$

Für die Berechung der a_n und b_n können wir die Berechung von $i)$ und $ii)$ verwenden. Wir ersetzten dabei einfach n durch $2n$. Dies sieht dann wiefolgt aus

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^\pi x\cos(2\pi nx/T) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{2((-1)^{2n} - 1)}{\pi(2n)^2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^\pi x\sin(2\pi nx/T) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2nx)\,dx \\
&= \frac{2(-1)^{2n+1}}{2n} = \frac{(-1)}{n}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die zu $f_4(x)$ assozierte Fourierreihe

$$
f_4(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2nx)\,.
$$

Wir sehen, dass $f_4(x) - \pi/2$ eine ungerade Funktion ist. Zur Kontrolle können sie dies anhand der Skizze nachvollziehen.

(b) Da die Funktion $f_1(x)$ überall stetig ist, können wir nach dem Theorem von Riemann-Lebesgue

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx) \tag{1}$$

schreiben. Setzen wir nun in (1) den Wert $x = \pi$ so folgt aus $\cos(n\pi) = (-1)^n$, dass

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}(-1)^n = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)^2}\,.$$

Lösen wir diese Gleichung auf folgt

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ ungerade}}} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$