7.1. Gerade und ungerade Funktion

(a) Nehmen Sie an, dass $f(x)$ gerade ist. Somit gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = f(-x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}.$$

Merken Sie, dass $f(-x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{inx}$ ist. Somit folgt $c_n = c_{-n}$.

Wenn $c_n = c_{-n}$ ist, folgt leicht $f(x) = f(-x)$. In der Tat,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx} = f(-x).$$

(b) Ähnlich mit **(a)**.

(c) Nehmen Sie an, dass $f(x)$ reelle ist. Dann gilt $f(x) = \overline{f(x)}$. Somit gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n}\,\overline{e^{inx}}.$$

Weil $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$ ist, folgt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} e^{-inx}.$$

Aber $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$. Wenn wir die obigen Gleichungen zusammensetzen, erhalten wir $\overline{c_n} = c_{-n}$.

Wenn $\overline{c_n} = c_{-n}$ ist, folgt aus der obigen Berechnung, dass $f(x) = \overline{f(x)}$ ist.

7.2. Fourier-Reihe I

(a) f hat Periode $T = 2\pi$. Da die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe sind

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \mathrm{e}^{-inx}\, \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin(x)\mathrm{e}^{-inx}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{-inx}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Durch die Substitution erstes Integrals $x' = -x$ und durch die eulersche Formel $\cos(t) = (\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it})/2$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_n =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(x')\mathrm{e}^{inx'}\,\mathrm{d}x' + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(x)(\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx})\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Durch partialle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\pi}\left([-\cos(x)\cos(nx)]_0^\pi - n\int_0^\pi \cos(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left((-1)^n + 1 - n\int_0^\pi \cos(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left((-1)^n + 1 - n\left([\sin(x)\sin(nx)]_0^\pi - n\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left((-1)^n + 1 + n^2\pi c_n\right)
\end{aligned}$$

Somit gilt $(1-n^2)\,c_n = \frac{1}{\pi}\left((-1)^n + 1\right)$ und dann ist

$$c_n = \frac{(-1)^n + 1}{\pi(1-n^2)}.$$

Damit ist die komplexe Fourierreihe von $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n + 1}{\pi(1-n^2)}\mathrm{e}^{inx}.$$

(b) Da f gerade ist , gilt $b_k = 0$ für jede $k \in \mathbb{N}$; wir berechnen dann a_k:

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 = \frac{2}{\pi}, \\
a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} + \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} = 2\frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} \quad \forall k \geq 1.
\end{aligned}$$

Somit ist die reelle Fourerreiehe

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^\infty 2\frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)}\cos(nx).$$

7.3. Fourier-Reihe II

(a) Siehen Sie das Lösungsblatt der Prüfung von Februar 2017 hier: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0373-00L`. Wie dort gezeigt, ist die reelle Fourier-Reihe der Fortsetzung:

$$f(x) \sim \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right),$$

somit ist die komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2} e^{i\frac{n\pi x}{2}}.$$

(b) Weil die 4-periodische Fortsetzung von $f(x)$ stetig und stückweise differenzierbar ist, dann gilt $f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$. Setzen $x = 2$. Dann haben wir

$$f(2) = 2 = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{\pi^2 n^2} (-1)^n = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2}.$$

Somit erhalten wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ausserdem setzen wir $x = 0$. Es folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Damit

$$\sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^{n+1}) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{24}.$$

und

$$\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^{n+1}) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

7.4. Eine numerische Reihe

(a) Weil $\cos(ix) = \cosh x$ ist, dann ist f_i eine reelle Funktion. Benutzen Sie die folgenden Code

$$Plot[Cos(Pix), \{x, -Pi, Pi\}]$$

und

$$Plot[Cos(ix), \{x, -Pi, Pi\}]$$

um f_α bzw. f_i mit Wolfram-alpha zu skizzieren.

(b) Da f_α stetig und stückweise differenzierbar ist, konvergiert ihre Fourier-transformierte punktweise gegen die 2π-periodische Fortsetzung von f_α.

Was die komplexe Fourier-Reihe von f_α betrifft, ist der $n$te Fourier Koeffizient durch:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x})e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(\alpha-n)x}+e^{-i(\alpha+n)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{i(\alpha-n)x}}{i(\alpha-n)}-\frac{e^{-i(\alpha+n)x}}{i(\alpha+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{4\pi i}\frac{(e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi})(\alpha+n)-(e^{-i\alpha\pi}-e^{i\alpha\pi})(\alpha-n)}{\alpha^2-n^2} \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

gegeben. Folglich ist die komplexe Fourier-Reihe von f_α

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}e^{inx}.$$

Was die reelle Fourier-Reihe betrifft, weil f_α gerade ist, hat die Reihe nur Cosinus-Koeffizienten, die durch:

$$a_0 = c_0 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}, \qquad a_n = c_n + c_{-n} = 2\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2},$$

gegeben sind. Deswegen ist die reelle Fourier-Reihe durch

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}\cos(nx)$$

gegeben.

(c) Um zu n^2+1 im Nenner zu erhalten, setzen wir $\alpha = 1$ in der reelle Fourier-Reihe ein:

$$f_i(x) = \frac{\sin(i\pi)}{i\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{i\sin(i\pi)}{-1-n^2}\cos(nx),$$

und mit den elementaren Identitäten können wir

$$\cosh x = \frac{\sinh\pi}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{\sinh(\pi)}{1+n^2}\cos(nx)$$

schreiben; zuletzt setzen wir $x = \pi$ ein um die gesuchte Summe zu bekommen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} - \frac{1}{2}.$$

(d) Die Summe ist 1.0766 auf 4 Dezimalstellen. Man müssen genau 13505 Termen addieren um diese Präzision zu kommen. Benutzen Sie der folgenden Code:

$$sum\ n = 1\ to\ 13505\ 1/(1+n^2)$$

mit Wolfram-alpha.

7.5. Challenge

Wir nehmen an, dass eine endliche Fourier-Reihe erhalten. Eine endliche Fourier-Summe ist überall stetig auf $\mathbb{R}$ und die π-periodische Fortsetzung von $f(x)$ ist nicht stetig. In der Tat, $g(\pi) = e^{\pi^2-\pi}$, aber

$$\lim_{x\to\pi,\ x>\pi} g(x) = \lim_{x\to-\pi,\ x>-\pi} g(x) = \lim_{x\to-\pi,\ x>-\pi} f(x) = e^{\pi^2+\pi} \neq g(\pi).$$

Widerspruch!