8.1. Reelle un Komplexe Fourierreihe Sei $f(x) = e^x$ für $x \in [0, \pi]$.

(a) Wir berechnen die komplexe Fourierreihe der 2π periodischen geraden Fortsetzung von $f(x)$.

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^x e^{-ikx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-x}e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{(1-ik)x}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-(1+ik)x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-ik)\pi}-1}{1-ik} + \frac{e^{(1+ik)\pi}-1}{1+ik}\right) \\
&= \frac{e^{\pi}}{2\pi}\frac{(1+ik)e^{-i\pi k} + (1-ik)e^{i\pi k}}{1+k^2} - \frac{1}{\pi(1+k^2)} \\
&= \frac{e^{\pi}}{\pi(1+k^2)}\left(\cos(\pi k) + k\sin(\pi k)\right) - \frac{1}{\pi(1+k^2)} \\
&= \frac{e^{\pi}(-1)^k}{\pi(1+k^2)} - \frac{1}{\pi(1+k^2)} \\
&= \frac{(-1)^k e^{\pi} - 1}{\pi(1+k^2)}\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist die komplexe Fourierreihe der gerade Fortsetzung

$$
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{\pi}-1}{\pi(1+k^2)} e^{ikx}.
$$

Um die reelle Fourierreihe zu bestimmen, benutzen wir die Relationen $\forall k \geq 0$

$$
\begin{aligned}
a_k &= c_k + c_{-k}\,, \\
b_k &= i(c_k - c_{-k})\,.
\end{aligned}
$$

Da f gerade ist, gilt $b_k = i(c_k - c_{-k}) = 0$ und somit erhalten wir

$$
a_k = c_k + c_{-k} = 2c_k = 2\frac{(-1)^k e^{\pi}-1}{\pi(1+k^2)}\,.
$$

Damit ist die reelle Fourierreihe der gerade Fortsetzung

$$
\frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k e^{\pi}-1}{\pi(1+k^2)}\cos(kx).
$$

(b) Analog berechnen wir die komplexe Fourierreihe der 2π periodischen ungeraden Fortsetzung von $f(x)$,

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^x e^{-ikx}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-x}e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-ik)\pi}-1}{1-ik} + \frac{1-e^{(1+ik)\pi}}{1+ik}\right) \\
&= \frac{e^{\pi}}{2\pi}\frac{(1+ik)e^{-i\pi k}-(1-ik)e^{i\pi k}}{1+k^2} - \frac{ik}{\pi(1+k^2)} \\
&= \frac{e^{\pi}}{\pi(1+k^2)}\left(-i\sin(\pi k) + ik\cos(\pi k)\right) - \frac{ik}{\pi(1+k^2)} \\
&= ik\frac{(-1)^k e^{\pi}-1}{\pi(1+k^2)}\,.
\end{aligned}$$

Da f ungerade ist, gilt $a_k = c_k + c_{-k} = 0$ und wir erhalten

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = 2ic_k = -2k\frac{(-1)^k e^{\pi}-1}{\pi(1+k^2)}\,.$$

(c) Wir berechnen die komplexe Fourier-Reihe der π periodischen Fortsetzung von $f(x)$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)e^{-2ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)e^{-2ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} f(x)e^{-2ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^x e^{-2ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} e^x e^{-2ik(x-\pi)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-2ik}\left[e^{x(1-2ik)}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{1-2ik}\left[e^{x(1-2ik)}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)
\end{aligned}$$

Somit ist

$$c_k = \frac{1}{\pi(1-2ik)}\left(e^{\pi}-1\right) = \frac{1+2ik}{\pi(1+4k^2)}(e^{\pi}-1).$$

Wir können jetzt a_k und b_k zu berechnen:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{\pi(1+4k^2)}(e^{\pi}-1)$$

und

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = -\frac{4k}{\pi(1+4k^2)}(e^{\pi}-1).$$

Damit ist die reelle Fourier-Reihe:

$$\frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(1+4k^2)}(e^\pi - 1)\cos(2kx) - \frac{4k}{\pi(1+4k^2)}(e^\pi - 1)\sin(2kx) \right)$$

8.2. Wellengleichung mit Dirichlet-Randbedingung

(a) Nehmen wir an, dass F ungerade ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_+$. Es folgt

$$\begin{aligned} u(-x,-t) &= \frac{1}{2}(F(-x-ct) + F(-x+ct)) = \frac{1}{2}(-F(x+ct) - F(x-ct)) \\ &= -\frac{1}{2}(F(x+ct) + F(x-ct)) = -u(x,t). \end{aligned}$$

Somit ist u eine ungerade Funktion. Es bleibt zu beweisen, dass u $2L$-periodische ist. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} u(x+2L,t) &= \frac{1}{2}(F(x+ct+2L) + F(x-ct+2L)) = \frac{1}{2}(F(x+ct) + F(x-ct)) \\ &= u(x,t). \end{aligned}$$

(b) Da F ungerade ist nach Konstruktion, ist ihre Fourierreihe

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

wobei b_k die passenden Koeffizienten sind. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}(F(x+ct) + F(x-ct)) \\ =& \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sin\left(\frac{\pi k(x+ct)}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi k(x-ct)}{L}\right) \right) \end{aligned}$$

wir können das mit Hilfe der trigonometrischen Identität

$$\frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{2} = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

umschreiben als

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right).$$

Wir müssen beweisen, dass u alle Bedingungen des Problems erfüllt. Es gilt,

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t)\\
=&\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\right) - c^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\\
=&-\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\left(\frac{\pi k c}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right) + c^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\\
=&0,
\end{aligned}$$

also erfüllt u die Wellengleichung. Betreffend die Randbedingungen, wir sehen, dass

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(F(x) + F(x)) = F(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,L)$$

und

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} -b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\left(\frac{\pi k c}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi k c t}{L}\right),
\end{aligned}$$

so dass, da $\sin(0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ ist. Schlussendlich sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
u(0,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(0) \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right) = 0,\\
u(L,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\sin(\pi k)}_{=0\,\forall k} \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right) = 0.
\end{aligned}$$

(c) Betrachten Sie F die gerade $2L$-periodische Fortsetzung von f:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

wobei a_k die passenden Koeffizienten sind.

Analog sehen wir, dass

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\right)$$

gilt. Wir beweisen, dass u alle Bedingungen des Problems erfüllt. Es gilt, Es gilt,

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t)\\
=&\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\right) - c^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\\
=&-\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\left(\frac{\pi k c}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right) + c^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\\
=&0,
\end{aligned}$$

also erfüllt u die Wellengleichung. Betreffend die Randbedingungen, wir sehen, dass

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(F(x) + F(x)) = F(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,L)$$

und

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} -a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\left(\frac{\pi k c}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi k c t}{L}\right),
\end{aligned}$$

so dass, da $\sin(0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ ist. Schlussendlich sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
u_x(0,t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\pi k}{L}\right) \sin(0) \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right) = 0,\\
u_x(L,t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\pi k}{L}\right) \underbrace{\sin(\pi k)}_{=0\,\forall k} \cos\left(\frac{\pi k c t}{L}\right) = 0.
\end{aligned}$$

8.3. Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletbedingung I Mit der trigonometrischen Identitäten

$$\sin^3(\alpha) = \frac{3\sin(\alpha) - \sin(3\alpha)}{4} \quad \text{and} \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha),$$

können wir den Anfangswert $u(x,0)$ umschreiben als

$$\sin^3(3\pi x) - 4\sin(4\pi x)\cos(4\pi x) = \frac{3}{4}\sin(3\pi x) - \frac{1}{4}\sin(9\pi x) + 2\sin(8\pi x).$$

Wir sehen, dass $u(x,0)$ ein *endliches* trigonometrisches Polynom ist, das nur Sinus Funktionen enthält. Daher können wir ohne zu Zögern den Separationsansatz anwenden: das bedeutet, dass die Lösung unseres Problems von der Form

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{M} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

ist wobei, in unserem Fall, $L = 1$, $M = 9$ und die Koeffizienten a_n wie oben sind. Genauer gesagt, erhalten wir die Formel

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\sin(3\pi x)\mathrm{e}^{-9\pi^2 t} + 2\sin(8\pi x)\mathrm{e}^{-64\pi^2 t} - \frac{1}{4}\sin(9\pi x)\mathrm{e}^{-81\pi^2 t}.$$

8.4. Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletbedingung II

(a) Weil die Gleichung eine Dirichletbedingung hat, betrachten wir eine ungerade 2π-periodische Fortsetzung von $u_0(x)$. Sei $F(x)$ dieser Fortsetzung und seiner Fourier-Reihe:

$$\tilde{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Wir müssen b_k berechnen:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{k}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2(-1)^k - 2}{k} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\left[x\cos(kx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{2(-1)^k - 2}{k} + \frac{2(-1)^k}{k} \\
&= \frac{2}{k}
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\tilde{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx).$$

Durch die Lösung für Wärmeleitungsgleichungen, erhalten wir

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx)\,e^{-3k^2 t}.$$

(b) Die Codes sind:

$$Plot[Sum[2/kSin(kx)Exp(-3k*0),\{k,1,100\}],\{x,-pi,pi\}]$$

$$Plot[Sum[2/kSin(kx)Exp(-3k*0.0001),\{k,1,100\}],\{x,-pi,pi\}]$$

$$Plot[Sum[2/kSin(kx)Exp(-3k*0.01),\{k,1,100\}],\{x,-pi,pi\}]$$

$$Plot[Sum[2/kSin(kx)Exp(-3k*0.1),\{k,1,100\}],\{x,-pi,pi\}]$$

$$Plot[Sum[2/kSin(kx)Exp(-3k*1),\{k,1,100\}],\{x,-pi,pi\}]$$

und

$$Plot[Sum[2/kSin(kx)Exp(-3k*10),\{k,1,100\}],\{x,-pi,pi\}]$$

(c) Benutzen Sie dieses Website:
`http://math.uchicago.edu/~luis/pde/heat.html`