9.1. Wärmeleitungsgleichung mit Neumannrandbedingungen

(a) Da die Fortsetzung π-periodisch ist, sie hat die Form:

$$\sin(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx) \quad x \in [0, \pi].$$

Wir berechnen die Koeffizienten.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(x)\Big]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Mit Hilfe irgendwelcher trigonometrischer Formeln, oder mit den Eulerschen Formeln, berechnen wir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left((2n+1)x\right) - \sin\left((2n-1)x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2} \end{aligned}$$

Da die gerade π-periodische Fortsetzung stetig und stückweise differenzierbar ist, schlissen wir, dass die Fourierreihe punktweise konvergiert und daraus folgt

$$\sin(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\cos(2nx), \quad x \in [0, \pi].$$

(b) Mit dem Separationsansatz $U(x,t) = X(x)T(t)$ kommt man auf die Gleichungen

$$\begin{cases} X(x)T'(t) &= 4X''(x)T(t), & \text{für } 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ X'(0)T(t) &= 0, & \text{für } t > 0, \\ X'(\pi)T(t) &= 0, & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung (und daraus, dass $T(t)$ nicht identisch gleich Null ist) folgt

$$\frac{4X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

für alle $x \in (0, \pi)$ und alle $t > 0$ und da dies nur der Fall sein kann, wenn dieser Wert eine Konstante (die im Folgenden λ genannt wird) ist, haben wir also für X die Bedingungen

$$\begin{cases} X''(x) &= \frac{\lambda}{4}X(x), & \text{für } 0 < x < \pi, \\ X'(0) &= 0, \\ X'(\pi) &= 0. \end{cases}$$

Bekanntlich sind die Lösungen für solche Differentialgleichungen von der Form

a) für $\lambda > 0$: $Ae^{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}x}$,

b) für $\lambda = 0$: $A + Bx$,

c) für $\lambda < 0$: $A\cos(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}x)$.

Für den ersten Fall überprüft man leicht, dass die Bedingungen

$$X'(0) = 0 = X'(\pi)$$

keine andere Wahl als $A = B = 0$ lassen. Im zweiten Fall muss $B = 0$ sein, aber A kann beliebig gewählt werden. Im dritten Fall hingegen sind die Randbedingungen für X' genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{2}B\sqrt{-\lambda} = 0$$

und gleichzeitig

$$-\frac{1}{2}A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi\right) + \frac{1}{2}B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0$$

gilt. Dieses System ist genau dann unterbestimmt, wenn $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi$ eine Nullstelle des Sinus ist, also $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ gilt (bemerke, dass n und $-n$ die gleiche Funktion liefern, deshalb wird im Folgenden stets $n > 0$ betrachtet; $n = 0$ korrespondiert zum zweiten, oben bereits betrachteten Fall). Für den zugehörigen λ-Wert ergibt sich für jedes $n \geq 0$: $\lambda_n = -4n^2$. Die zugehörige Eigenfunktion X_n lautet (bis auf eine reelle Konstante) $X_n(x) = \cos(nx)$ (bemerke, dass dies auch für $n = 0$ passt) und die assoziierte Funktion T_n erfüllt die Differentialgleichung

$$T_n'(t) = -4n^2 T_n(t),$$

d.h. $T_n(t) = ce^{-4n^2 t}$ für alle $t \geq 0$. Durch Superposition dieser Lösungen kann schliesslich noch die Anfangsbedingung justiert werden: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-4n^2 t}\cos(nx)$ löst unser Anfangswertproblem mit homogenen Neumannrandbedingungen genau dann, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx) \overset{\text{von (a)}}{=} \sin(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\cos(2nx), \quad x \in [0,\pi].$$

Alles in allem, die Lösung hat die Form (Vorsicht mit den Summationindex!)

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\mathrm{e}^{-16n^2 t}\cos(2nx), \quad x \in [0,\pi].$$

(c) Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\mathrm{e}^{-16n^2t}\cos(2nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\mathrm{e}^{-16n^2t}\int_0^{\pi}\cos(2nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}\mathrm{e}^{-16n^2t}\underbrace{\left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{\pi}}_{=0} = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Wir schlissen, dass die mittlere Termperatur den Stab in der Tat konstant ist, übereinstimmend mit der Isolier-Annahme.

9.2. Wärmeleitungsgleichung mit inhomogener Dirichletrandbedingung

Eine stationäre Lösung $v(t,x) = v(x)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{cases}
v_t - 2v_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\
v(0,t) = 1 & t \in \mathbb{R}_+ \\
v(1,t) = 2 & t \in \mathbb{R}_+
\end{cases}
$$

ist gegeben durch $v(x) = x+1$. Sei $w := u - v$; w löst dann das folgende inhomogene Problem für die Wärmenleitungsgleichung:

$$
\begin{cases}
w_t - 2w_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\
w(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\
w(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\
w(x,0) = x + \cos^2(\pi x) - (x+1) = -1 + \cos^2(\pi x) & x \in (0,1).
\end{cases}
$$

Bekanntlich ist die Lösung dieses Problems gegeben durch

$$
w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x),
$$

wobei $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$ die Fourierreihe der ungerade Fortsetzung von $-1+\cos^2(\pi x)$ ist. Wir berechnen jetzt diese Reihe. Bemerke, dass

$$
-1 + \cos^2(\pi x) = -\sin^2(\pi x) = \frac{\cos(2\pi x) - 1}{2}
$$

und damit:

$$\begin{aligned}
C_n &= 2\int_0^1 \frac{\cos(2\pi x)-1}{2}\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \cos(2\pi x)\sin(\pi n x) - \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\sin((2+n)\pi x) - \sin((2-n)\pi x)}{2} - \sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((2+n)\pi x)}{(2+n)\pi} + \frac{\cos((2-n)\pi x)}{(2-n)\pi}\right]_0^1 + \frac{\cos(\pi n)-1}{\pi n} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^n}{(2+n)\pi} - \frac{1-(-1)^n}{(2-n)\pi}\right] + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls}\, n\, \text{gerade} \\ \frac{8}{\pi n(n^2-4)} & \text{falls}\, n\, \text{ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Von (a), erhalten wir, dass:

$$w(x,t) = \sum_{n\,\text{ungerade}} \frac{8}{\pi n(n^2-4)} \mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t} \sin(\pi n x)$$

da $u = v + w$ ist, folgt

$$u(x,t) = x + 1 + \sum_{n\,\text{ungerade}} \frac{8}{\pi n(n^2-4)} \mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t} \sin(\pi n x).$$

9.3. Inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Neumannrandbedingung

Zuerst finden wir eine partikuläre Losung v des Problems

$$\begin{cases} v_t - 4v_{xx} = A\cos(\alpha t) & (x,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Wir brauchen nur *eine* Lösung: da $A\cos(\alpha t)$ nur von t abhängt, wir können unseren Glück mit einer Funktion v versuchen, welche nur von t abhängt: $v(x,t) = v(t)$. Die PDE wird dann

$$v'(t) = A\cos(\alpha t),$$

und eine Lösung dieser PDE is zum Beispiel $v(t) = \frac{A}{\alpha}\sin(\alpha t)$. Da v nur von t abhängt, sind die Randbedingungen auch erfüllt. Dann betrachten wir die Differenz $w = u - v$:

sie löst

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ w(x,0) = 1 + \cos^2(\pi x) & x \in (0,1) \\ w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Um dieses Problem zu lösen wählen wir wie üblich den Separationsansatz

$$w(x,t) = T(t)X(x),$$

und berechnen

$$\frac{T'(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k = \text{konstant}\,.$$

Die ODE

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k$$

besitzt je nach k eine andere Lösung:

$$\begin{array}{lll} k = 0: & X(x) = & ax + b. \\ k > 0: & X(x) = & ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x} \\ k < 0: & X(x) = & a\cos(\sqrt{-k}x) + b\sin(\sqrt{-k}x). \end{array}$$

Die Randbedingungen $X'(0) = X'(1) = 0$ erzwingen jedoch, dass nur der Fall $k = -\pi^2 n^2$ in Frage kommt, d.h.

$$X_n(x) = \gamma_n \cos(\pi n x) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \gamma_n \in \mathbb{R}.$$

Für $T(t)$ lautet die DGl nun

$$T'(t) = -4\pi^2 n^2 T(t)$$

und besitzt die Lösung

$$T_n(t) = A_n e^{-4\pi^2 n^2 t} \quad A_n \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung $w(x,t)$ durch

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-4\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n x)$$

gegeben. Die Koeffizienten a_n bestimmen wir mit der Anfangsbedingung

$$w(x,0) = 1 + \cos^2(\pi x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\,.$$

Daraus folgt

$$a_0 = \frac{3}{2}\,, \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_n = 0 \quad \forall\, n \neq 0,\ 2\,.$$

Damit ist

$$w(x,t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)e^{-16\pi^2 t}$$

und somit

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \frac{A}{\alpha}\sin(\alpha t) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)e^{-16\pi^2 t}.$$

9.4. Separation der Variablen für die Wellengleichung

Um dieses Problem zu lösen wählen wir wie üblich den Separationsansatz

$$u(x,t) = T(t)X(x),$$

und berechnen

$$\frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{konstant}\,.$$

Die ODE

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

besitzt je nach k eine andere Lösung:

$$\begin{aligned}
\lambda = 0: \quad X(x) &= ax + b. \\
\lambda > 0: \quad X(x) &= ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \\
\lambda < 0: \quad X(x) &= a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x).
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen $X(-\pi) = X(\pi) = 0$ erzwingen jedoch, dass nur der Falle $\lambda_n = -n^2$ oder $\lambda_n = -n^2/4$ in Frage kommt, d.h.

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right), \quad \lambda_n = -n^2/4$$

wenn n ungerade, positiv ist oder

$$X_n(x) = \sin(nx) \quad \text{für} \quad \lambda_n = -n^2,\ n \geq 1$$

Für $T(t)$ lautet die DGl nun

$$T''(t) = -4n^2 T(t)$$

wenn $\lambda_n = -n^2$ ist und besitzt die Lösung

$$T_n(t) = C_n \sin(2nt) + D_n \cos(2nt) \quad C_n, D_n \in \mathbb{R},$$

oder

$$T''(t) = -n^2 T(t)$$

wenn $\lambda_n = -n^2/4$ ist und besitzt die Lösung

$$T_n(t) = C'_n \sin(nt) + D'_n \cos(nt) \quad C'_n, D'_n \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung $u(x,t)$ durch

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin(2nt) + D_n \cos(2nt)) \sin(nx) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (C'_{2n+1} \sin((2n+1)t) + D'_{2n+1} \cos((2n+1)t)) \cos\left(\frac{(2n+1)}{2} x\right) \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Wenn $f(x) = \cos(x/2) + \sin(x) + 3\sin(5x)$ ist, haben wir

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} D'_{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)}{2} x\right) = f(x).$$

Somit erhalten wir $D_1 = 1,\ D_5 = 3,\ D_n = 0$ für $n \neq 1, 5$ und $D'_1 = 1,\ D'_{2n+1} = 0$ für $n \neq 0$.

(b) Wenn $g(x) = \cos(x/2) + \sin(x) + 3\sin(5x)$ ist, haben wir

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nC_n \sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) C'_{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)}{2} x\right) = g(x).$$

Es folgt, dass $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_5 = \frac{3}{10}$, $C_n = 0$ für $n \neq 1, 5$ und $C'_1 = 1$, $C'_n = 0$ für $n \geq 1$.

(c) Aus Aufgabe 8.4, ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegeben durch:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

In dem Intervall $(-\pi, \pi)$ gilt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx)$. Analog, haben wir

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} D'_{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)}{2} x\right) = f(x).$$

Es folgt, dass $D_n = \frac{2}{n}$ und $D'_{2n+1} = 0$ für alle $n \geq 0$.

9.5. Polarkoordinaten

(a) $u_1(x,y) = \tilde{u}_1(r,\phi) = r^2$, $u_2(x,y) = \tilde{u}_2(r,\phi) = \cos\phi - \sin\phi$, $u_3(x,y) = \tilde{u}_3(r,\phi) = \cot\phi$.

(b)

$$\tilde{v}_1(r,\phi) = v_1(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{n/2},$$
$$\tilde{v}_2(r,\phi) = v_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$
$$\tilde{v}_3(r,\phi) = v_3(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$
$$\tilde{v}_4(r,\phi) = v_4(x,y) = -\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \pi.$$