10.1. Eigenschaften der Fouriertransformation.

(a) Linearität. Weil $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, gilt $af + bg \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[af+bg](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (af(x)+bg(x))\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\ &= a\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x + b\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\ &= a\mathcal{F}[f](\xi) + b\mathcal{F}[g](\xi).\end{aligned}$$

(b) Ableitung. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}[f](\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\ &= -i\mathcal{F}[xf(x)](\xi).\end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\ &= f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-i\xi x})\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to+\infty} f(R)\mathrm{e}^{-i\xi R} - \lim_{R\to-\infty} f(R)\mathrm{e}^{-i\xi R} + i\xi\mathcal{F}[f](\xi).\end{aligned}$$

Weil $f \in L^1(\mathbb{R})$ muss $\lim_{R\to\pm\infty} f(R) = 0$ sein und weil $|\mathrm{e}^{-i\xi R}| = 1$ ist, gilt $\lim_{R\to\pm\infty} f(R)\mathrm{e}^{-i\xi R} = 0$, so dass wir schliessen können:

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi\mathcal{F}[f](\xi).$$

(c) Höhere Ableitung. Was die Ableitungen höherer Ordnung betrifft, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\mathcal{F}[f](\xi) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)^k\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-i)^k\mathcal{F}[x^k f(x)](\xi).\end{aligned}$$

Für die letzte Aussage benutzen wir partielle Integration k mal auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f^{(k)}](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{f^{(k-1)}(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ weil } f^{(k-1)}\in L^1(\mathbb{R})} + (i\xi)\int_{\mathbb{R}} f^{(k-1)}\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{(i\xi)f^{(k-2)}\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ weil } f^{(k-2)}\in L^1(\mathbb{R})} + (i\xi)^2\int_{\mathbb{R}} f^{(k-2)}\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \dots \\
&= (i\xi)^k \int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = (i\xi)^k\mathcal{F}[f](\xi).
\end{aligned}$$

(d) Translation/Modulation. Wegen $\int_{\mathbb{R}}|\tau_a f|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}|f|\,\mathrm{d}x$, $\tau_a f \in L^1(\mathbb{R})$, und durch einen Variablenwechsel $y = x - a$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\tau_a f](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi a}e^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y = \mathcal{F}[f(x)](\xi)e^{-i\xi a}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\tau_a\mathcal{F}[f](\xi) &= \mathcal{F}[f](\xi - a) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i(\xi-a)x}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}[f(x)\mathrm{e}^{iax}](\xi).
\end{aligned}$$

(e) Faltung/Multiplikation. Mit dem Satz von Fubini sieht man, dass die Funktion $(f * g)$, wie in der Aufgabenstellung definiert, eine L^1-Funktion ist. Damit ist die Fouriertransformierte wohldefiniert und es gilt für ein beliebiges $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\;\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}\,\mathrm{d}x\; g(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)\mathrm{e}^{-i\xi z}\,\mathrm{d}z\; g(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi).
\end{aligned}$$

Für die andere Aussage kann man entweder eine ähnliche Aussage für die inverse Transformation zeigen und diese anwenden oder direkt rechnen, was im folgenden gezeigt wird:

$$\begin{aligned}
(\hat{f} * \hat{g})(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\hat{g}(\xi - y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-iz(\xi-y)}\, dz\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-iz(\xi-y)}\, dzdydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{g}(\xi - y)\, dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi-\tilde{y})}\hat{g}(\tilde{y})\, d\tilde{y}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} 2\pi g(x)\, dx \\
&= 2\pi \mathcal{F}[fg](\xi).
\end{aligned}$$

(Beachte, dass wir im Schritt mit der Variablentransformation $\tilde{y} = \xi - y$ kein zusätzliches Vorzeichen kriegen, weil wir die Grenzen auch gleich wieder umgedreht haben.)

(f) Zweimalige Transformation. Mit dem Satz, dass $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$, folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\hat{f}](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{-iy\xi}\, d\xi \\
&= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i(-y)\xi}\, d\xi \\
&= 2\pi f(-y).
\end{aligned}$$

(g) Integral. Hierfür verwenden wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Regel zur Ableitung von Funktionen und berechnen:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_a^x f(y)\, dy \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}\varphi(x) &= f(x) \\
\Rightarrow i\xi\hat{\varphi}(\xi) &= \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Mit Umstellen folgt dann sofort die Behauptung.

(h) Streckung. Weil $f \in L^1(\mathbb{R})$, sind $\delta_\lambda f$ und $\delta_{1/\lambda} f$ in $L^1(\mathbb{R})$. Durch einen Variablenwechsel $y = \lambda x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta_\lambda f](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi\frac{y}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\delta_{1/\lambda}\mathcal{F}[f](\xi),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta_\lambda \mathcal{F}[f](\xi) &= \mathcal{F}[f](\lambda\xi)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-i\xi y}\frac{\mathrm{d}y}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}[\delta_{1/\lambda}f](\xi).\end{aligned}$$

10.2. Fourier-Transformation

(a)

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix(-\xi)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[f](-\xi),$$

und

$$\mathcal{F}[e^{iax}f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\xi-a)}\mathrm{d}x = \mathcal{F}[f](\xi-a).$$

(b)

$$\mathcal{F}^{-1}[h](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\xi|}e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{a\xi}e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-a\xi}e^{i\xi x}\mathrm{d}\xi\right).$$

Somit gilt

$$\mathcal{F}^{-1}[h](x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a+ix}e^{\xi(a+ix)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{ix-a}e^{\xi(ix-a)}\Big|_{0}^{\infty}\right).$$

Wenn $\xi \to \infty$, folgt $e^{\xi(ix-a)} \to 0$ weil $e^{i\xi x}$ beschrankt ist und $e^{-\xi a} \to 0$. Damit

$$\mathcal{F}^{-1}[h](x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a+ix} + \frac{1}{a-ix}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{2a}{x^2+a^2} = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2}.$$

(c) Wir benutzen **(a)** um $\mathcal{F}[g]$ zu lösen. Wir erhalten:

$$\mathcal{F}[g](\xi) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[g](-\xi).$$

Durch **(b)** folgt, dass $\mathcal{F}^{-1}[g](-\xi) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{\xi^2+a^2}$ ist. Somit

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}.$$

(d) Um die Fouriertransformierte von $f(x) = x^2 e^{-a|x|}$ zu berechnen, benutzen wir

$$\mathcal{F}[x^2 g(x)](\xi) = -\frac{d^2}{d\xi^2}\mathcal{F}[g(x)](\xi).$$

Durch **(c)** haben wir $[F][g](\xi) = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$. Damit erhalten wir die Fouriertransformierte von $f(x)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\xi) &= -\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{2a}{a^2+\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\frac{4a\xi}{(a^2+\xi^2)^2} \\
&= \frac{4a}{(a^2+\xi^2)^2} - \frac{4a\xi 4\xi}{(a^2+\xi^2)^3} \\
&= \frac{4a(a^2-3\xi^2)}{(4+\xi^2)^3}\,.
\end{aligned}$$

Um die Fouriertransformierte von $f(x) = \sin(2x+1)e^{-4(x+1)^2}$ zu berechnen benutzen wir die Regeln

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}[f](\xi),$$

$$\mathcal{F}[f(\lambda x)](\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}[f](\xi/\lambda),$$

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi-a).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\sin(2x+1)e^{-4(x+1)^2}\right](\xi) &= e^{i\xi}\mathcal{F}\left[\sin(2x-1)e^{-(2x)^2}\right](\xi) \\
&= \frac{1}{2}e^{i\xi}\mathcal{F}\left[\sin(x-1)e^{-x^2}\right]\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{i\xi}\mathcal{F}\left[\frac{1}{2i}\left[e^{i(x-1)} - e^{-i(x-1)}e^{-x^2}\right]e^{-x^2}\right]\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4i}e^{i\xi}\left(\mathcal{F}\left[e^{-i}e^{-x^2}\right]\left(\frac{\xi}{2}-1\right) - \mathcal{F}\left[e^{i}e^{-x^2}\right]\left(\frac{\xi}{2}+1\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4i}e^{i(\xi-1)}e^{-(\xi/2-1)^2/4} - \frac{\sqrt{\pi}}{4<i}e^{i(\xi+1)}e^{-(\xi/2+1)^2/4}\,.
\end{aligned}$$

10.3. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten

(a) Überprufen Sie.

(b) Die Inversion der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

ist

$$A^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\phi & -\sin\phi \\ r\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir

$$A^{-1}\begin{pmatrix} \partial_r u \\ \partial_\phi u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} \iff \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\phi & -\sin\phi \\ r\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_r u \\ \partial_\phi u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \cos\phi\partial_r u - \frac{1}{r}\sin\phi\partial_\phi u \\ \partial_y u &= \sin\phi\partial_r u + \frac{1}{r}\cos\phi\partial_\phi u \end{aligned}$$

Wir berechnen $\partial^2_{xx}u$ und $\partial^2_{yy}u$ jetzt.

$$\partial^2_{xx}u = \partial_x(\partial_x u) = \cos\phi(\partial_r(\partial_x u)) - \frac{1}{r}\sin\phi(\partial_\phi(\partial_x u)).$$

$$\partial_r(\partial_x u) = \cos\phi\partial^2_{rr}u + \frac{1}{r^2}\sin\phi\partial_\phi u - \frac{1}{r}\sin\phi\partial^2_{r\phi}u,$$

und

$$\partial_\phi(\partial_x u) = -\sin\phi\partial_r u + \cos\phi\partial^2_{r\phi}u - \frac{1}{r}\cos\phi\partial_\phi u - \frac{1}{r}\sin\phi\partial^2_{\phi\phi}u.$$

Somit gilt

$$\partial^2_{xx}u = \partial^2_{rr}u\cos^2\phi + \partial^2_{\phi\phi}u\left(\frac{1}{r^2}\sin^2\phi\right) + \partial^2_{r\phi}u\left(-\frac{2}{r}\sin\phi\cos\phi\right) + \partial_r u\frac{1}{r}\sin^2\phi + \partial_\phi u\frac{1}{r^2}\sin\phi\cos\phi.$$

Ausserdem,

$$\partial^2_{yy}u = \partial_y(\partial_y u) = \sin\phi(\partial_r(\partial_y u)) + \frac{1}{r}\cos\phi(\partial_\phi(\partial_y u)).$$

$$\partial_r(\partial_y u) = \sin\phi\partial^2_{rr}u - \frac{1}{r^2}\cos\phi\partial_\phi u + \frac{1}{r}\cos\phi\partial^2_{r\phi}u,$$

und

$$\partial_\phi(\partial_y u) = \cos\phi\partial_r u + \sin\phi\partial^2_{r\phi}u - \frac{1}{r}\sin\phi\partial_\phi u + \frac{1}{r}\cos\phi\partial^2_{\phi\phi}u.$$

Somit gilt

$$\partial^2_{yy}u = \partial^2_{rr}u\sin^2\phi + \partial^2_{\phi\phi}u\left(\frac{1}{r^2}\cos^2\phi\right) + \partial^2_{r\phi}u\left(\frac{2}{r}\sin\phi\cos\phi\right) + \partial_r u\frac{1}{r}\cos^2\phi - \partial_\phi u\frac{1}{r^2}\sin\phi\cos\phi.$$

(c) Durch **(b)** und $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ schliessen wir, dass

$$\Delta u = \partial^2_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi} u$$

ist.