11.1. Fourier-Transformation, Ableitungen, und Stammfunktionen
Siehe das Lösungsblatt der Prüfung von August 2017

`https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0373-00L/vergangene-prufungen/ExamSolution_2017-08.pdf`

11.2. Fourier-Transformation und gewöhnliche Differentialgleichungen
Wir berechnen die Fouriertransformation der Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = e^{-|x|}.$$

Da $\mathcal{F}(u'') = \xi^2 \hat{u}(\xi)$ und $\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \frac{2}{1+\xi^2}$, erhalten wir

$$(1+\xi^2)\hat{u} = \frac{2}{1+\xi^2}\,,$$

Damit ist die Lösung $u(x)$ gegeben durch

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{(1+\xi^2)^2}\right).$$

Mit Aufgabe 11.5 folgt

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{(1+\xi^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(e^{-|x|}) \cdot \mathcal{F}(e^{-|x|})\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}e^{-|y|}\,dy$$

Wir berechnen

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}e^{-|y|}\,dy = (1+|x|)e^{-|x|}\,.$$

Somit schliessen wir, dass u gegeben ist durch

$$u(x) = \frac{1}{2}(1+|x|)e^{-|x|}\,.$$

11.3. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern I
Wie bekannt, ist u gegeben durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)K(x-y,t)\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

oder äquivalent, durch einen Variablenwechsel $y' = x - y$:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)K(y,t)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

wobei K der Wärmeleitungskern ist.

(a) Hier benutzen wir (1). Mit $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ gilt:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \mathrm{e}^{-2y} \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{(x-y)^2}{4t}+2y\right)} \,\mathrm{d}y.$$

Das Argument von e (ohne dem Minus) ist:

$$\frac{(x-y)^2}{4t} + 2y = \frac{x^2 + y^2 - 2xy + 8yt}{4t} = \frac{y^2 + 2y(4t-x) + x^2}{4t}.$$

Wir wollen quadratisch ergänzen, nämlich:

$$y^2 + 2y(4t-x) + x^2 = (y + (4t-x))^2 - (4t-x)^2 + x^2.$$

Mit diesem Trick erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y+(4t-x))^2-(4t-x)^2+x^2}{4t}} \,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2-(4t-x)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-(4t-x))^2}{4t}} \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Das Integral können wir bestimmen mit einem Variablenwechsel:

$$z = y - (4t - x),$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-(4t-x))^2}{4t}} \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} \,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} K(z,y) \,\mathrm{d}z = 1$$

Wir schliessen, dass

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2-(4t-x)^2}{4t}} = \mathrm{e}^{4t-2x}.$$

(b) Hier benutzen wir (2). Sei jetzt $f = \cos(x)$. Durch die trigonometrische Formel

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta,$$

sehen wir, dass

$$u(x,y) = \cos(x) \int_{\mathbb{R}} \cos(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y + \sin(x) \int_{\mathbb{R}} \sin(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y.$$

Weil $\sin(y)$ *ungerade ist, und* $K(y,t)$ *gerade ist, ist sin*$(y)K(y,t)$ *ungerade.* Weil das Integral einer ungeraden Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ immer null ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} \,\mathrm{d}y = 0.$$

Zum ersten Summand: mithilfe der eulerschen Formeln folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \cos(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{iy}+\mathrm{e}^{-iy}}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{iy}}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-iy}}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iy}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

wobei in dem letzten Teil ein Variablenwechsel $y' = -iy$ benutzen wurde. Dann merken wir, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iy}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\right](1) = \mathrm{e}^{-tz^2}\Big|_{z=1} = \mathrm{e}^{-t}.$$

Schliessen wir, dass

$$u(x,t) = \cos(x)\mathrm{e}^{-t}.$$

(c) Sei $f = e^{-x^2/4a}/\sqrt{4\pi a}$. Durch (2) erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{at}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4a}} e^{\frac{-y^2}{4t}}\,\mathrm{d}y.$$

Somit gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{at}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-t(x-y)^2-ay^2}{4at}}\,\mathrm{d}y.$$

Wir schreiben $-t(x-y)^2 - ay^2$ als:

$$-t(x-y)^2 - ay^2 = -tx^2 + 2txy - (t+a)y^2 = -(t+a)\left(y - \frac{tx}{t+a}\right)^2 - \frac{at}{t+a}x^2.$$

Somit gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{at}}e^{-\frac{x^2}{4(t+a)}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t+a}{4at}\left(y-\frac{tx}{t+a}\right)^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi\sqrt{at}}e^{-\frac{x^2}{4(t+a)}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t+a}{4at}z^2}\mathrm{d}z.$$

Sei $\omega = \sqrt{\frac{t+a}{4at}}z$. Durch Substitution der Variabilen und $\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2}d\omega = \sqrt{\pi}$, erhalten wir:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{at}}e^{-\frac{x^2}{4(t+a)}}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{4at}{t+a}}.$$

Somit gilt:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+a)}}e^{-\frac{x^2}{4(t+a)}}.$$

11.4. Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeleitungskern II
u ist durch die Formel

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} f(y) \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \, \mathrm{d}y$$

gegeben. Durch den Variablenwechsel $\frac{x-y}{\sqrt{4t}} = w$ erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T_1 \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \, \mathrm{d}y + T_2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \, \mathrm{d}y \\ &= T_1 \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{4t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w + T_2 \int_{-\frac{x}{\sqrt{4t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die gesuchten Grenzwerte:

(a) bei festem x, $\frac{x}{\sqrt{4t}} \to 0$ als $t \to +\infty$, also

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = T_1 \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w + T_2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

D.h. an einem beliebigen Ort wird man schliesslich den Durchschnitt der beiden anfänglichen Temperaturen T_1 und T_2 messen.

(b) Bei festem $t > 0$ sehen wir, dass wenn $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{4t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w = 0, \quad \text{und} \\ &\lim_{x \to +\infty} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w = 1, \end{aligned}$$

somit $\lim_{x \to +\infty} u(x,t) = T_2$. Zu einem festen Zeitpunkt misst man somit ganz weit am rechten Rand die Temperatur T_2.

(c) Wie in (b), bei festem $t > 0$ sehen wir, dass wenn $x \to -\infty$,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{4t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w = 1, \quad \text{und} \\ &\lim_{x \to -\infty} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-w^2} \, \mathrm{d}w = 0, \end{aligned}$$

somit $\lim_{x \to -\infty} u(x,t) = T_1$. Zu einem festen Zeitpunkt misst man ganz weit am linken Rand die Temperatur T_1.