## 12.1. Laplace-Gleichung auf dem Rechteck

**(a)** Wir machen den Separationansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Die PDE wird dann

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} =: \lambda$$

mit den Randbedingungen $Y(0) = 0 = Y(1)$ und $X(0) = 0$. Das $Y$-Problem

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(1) = 0 \end{cases}$$

besitzt nur für $\lambda = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ nichttriviale Lösungen. Sie haben die Form

$$Y_n(y) = A_n \sin(\pi n y), \quad A_n \in \mathbb{R}.$$

Somit hat das $X$-Problem für jedes $\lambda = (\pi n)^2$,

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

die Lösung

$$X_n(x) = B_n e^{\pi n x} - B_n e^{-\pi n x} = C_n \sinh(\pi n x), \quad C_n \in \mathbb{R}.$$

Der Lösungsansatz des gesamten Problems ergibt sich durch lineare Superposition der Basislösungen, also

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\pi n y) \sinh(\pi n x).$$

Die Konstanten $D_n$ werden durch die inhomogene Randbedingung bestimmt. Es soll gelten

$$u(1,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh(\pi n) \sin(n \pi y) = -\sin(2\pi y)\cos(2\pi y).$$

Weil $-\sin(2\pi y)\cos(2\pi y)$ gleich $\frac{-\sin(4\pi y)}{2}$ ist, erhalten wir mit Koeffizientenvergleich die Lösung

$$u(x,y) = -\frac{\sin(4\pi y)\sinh(4\pi x)}{2\sinh(4\pi)}.$$

**(b)** Mit dem Separationansatz $u(x) \stackrel{!}{=} X(x)Y(y)$ finden wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{konst.} = \lambda, \\
&X(x)Y(0) = x(x-1), \\
&X(x)Y(1) = 0 \Longrightarrow Y(1) = 0, \\
&X(0)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0, \\
&X(1)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(1) = 0.
\end{aligned}$$

Das Problem

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ \qquad\qquad X(0) = 0, \\ \qquad\qquad X(1) = 0, \end{cases}$$

besitzt nur für $\lambda = -\pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, von Null verschiedene Lösungen und diese haben dann die Form

$$X(x) = X_k(x) = A_k \sin(k\pi x) \quad x \in [0,1],\ A_k \text{ beliebig.}$$

Die Lösungen des Problems

$$\begin{cases} Y''(y) - \pi^2 k^2 Y(y) = 0, \\ \qquad\qquad Y(1) = 0, \end{cases}$$

sind $Y(y) = Y_k(y) = B_k \mathrm{e}^{-\pi k y}(1 + \mathrm{e}^{2\pi k y})$, $B_k$ beliebig. Aus dem Superpositionsprinzip hat $u$ den Ausdruck:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mathrm{e}^{-\pi k y}(1 + \mathrm{e}^{2\pi k y}) \sin(\pi k x).$$

Um die Koeffizienten $C_k$ zu bestimmen, beachten wir, dass

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2C_k \sin(k\pi x) \stackrel{!}{=} x(1-x)$$

somit

$$2C_k = \int_0^1 x(1-x)\sin(\pi k x)\,\mathrm{d}x = \frac{2(1-(-1)^k)}{k^3\pi^3};$$

also ist $u$ gegeben durch

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^k)}{k^3\pi^3} \mathrm{e}^{-\pi k y}(1 + \mathrm{e}^{2\pi k y}) \sin(\pi k x).$$

**(c)** Siehe das Lösungsblatt der Prüfung von Februar 2012

`https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0373-00L/vergangene-prufungen/ExamSolution_2012-02.pdf`.

### 12.2. Laplace-Gelichung auf der Kreis

**(a)** Gemäss dem Maximumprinzip werden Maximum und Minimum von $u$ auf $\overline{B_1(0)}$ in $\partial B_1(0)$ angenommen. Für $(x, y) \in \partial B_1(0)$ gilt aber

$$u(x, y) = 1 + 3x^4 \leq 1 + 3 \cdot 1 = 4$$

wegen $|x| \leq 1$ auf $\partial B_1(0)$ und

$$u(x, y) = 1 + 3x^4 \geq 1$$

wegen der Nichtnegativität der vierten Potenz auf $\mathbb{R}$.

<u>Alternativ:</u> Mit der Poissonschen Darstellungsformel erhält man:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} u(1, \theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} (1 + 3\cos^4(\theta))\, d\theta. \end{aligned}$$

Da die harmonische Fortsetzung der konstanten Funktion 1 auf $\partial B(0, 1)$ nach $B(0, 1)$ die konstante Funktion 1 ist, gilt für alle $r \in [0, 1)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}\, d\theta.$$

Außerdem ist für alle $r \in [0, 1)$ und alle $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} \geq 0. \tag{1}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2} (1 + 3\cos^4(\theta))\, d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}\, d\theta = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}(1+3\cos^4(\theta))\ d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\cdot 4\ d\theta = 4. \end{aligned}$$

(Im Prinzip ist diese Lösung keine essentiell andere als diejenige oben. Implizit wurde das Maximumprinzip bewiesen. Es manifestiert sich in der Positivität des Poisson-Kerns, vgl. (1).)

**(b)** Gemäss der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen (was nichts anderes ist als, dass der Poissonkern für $r = 0$ die konstante Funktion $\frac{1}{2\pi}$ ist) gilt:

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\cos(\varphi),\sin(\varphi))\ d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(1+3\cos^4(\varphi)\Big)\ d\varphi \\ &= 1 + \frac{3}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^4(\varphi)\ d\varphi}_{=:I}. \end{aligned}$$

Das Integral $I$ berechnen wir gesondert:

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi}\cos^4(x)\ dx &= \underbrace{\sin(x)\cos^3(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi}\sin(x)3\cos^2(x)(-\sin(x))\ dx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2x)\ dx = \frac{3}{8}\int_0^{4\pi}\sin^2(y)\ dy = \frac{3}{8}\cdot\frac{4\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass bekannt ist, dass $\sin^2(x)$ (sowie $\cos^2(x)$), wenn über eine volle Periode integriert, immer die Hälfte der Periode als Integralwert liefert. Somit ergibt sich in der oben unterbrochenen Berechnung von $u(0,0)$:

$$u(0,0) = 1 + \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{17}{8}.$$

**(c)** Schließlich bestimmen wir die Funktion $u$ mit Hilfe von Fourierreihen. Wir wissen aus der Vorlesung, dass wenn

$$u(1,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)\Big),$$

dann

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\Big(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)\Big).$$

Es gilt nun (vgl. mit der Vorlesung)

$$\cos^4(\theta) = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{\cos(4\varphi)}{8}$$

und damit:

$$1 + 3\cos^4(\varphi) = 1 + 3\Big(\frac{3}{8} + \frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{\cos(4\varphi)}{8}\Big) = \frac{17}{8} + \frac{3}{2}\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}\cos(4\varphi).$$

Damit haben wir bereits die Fourierreihe von $u(1,\cdot)$ und es folgt[1]

$$u(r,\varphi) = \frac{17}{8} + r^2\frac{3}{2}\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}r^4\cos(4\varphi).$$

Durch eine Probe verifiziert man, dass $u$ das Randwertproblem löst.

Aus der obigen Formel ergibt sich, da $0 \leq r < 1$ und $-1 \leq \cos(2\varphi) \leq 1$ und $-1 \leq \cos(4\varphi) \leq 1$, für alle $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$u(r,\varphi) \leq \frac{17}{8} + \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = 4.$$

Für die untere Abschätzung nehmen wir noch eine Umformung vor:

$$\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}r^2\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}r^4\cos(4\varphi) \\
&= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}r^2\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}r^4\Big(2\cos^2(2\varphi) - 1\Big) \\
&= \frac{14}{8} + \frac{3}{2}r^2\cos(2\varphi) + \frac{3}{4}\Big(r^2\cos(2\varphi)\Big)^2 \\
&= \frac{14}{8} + \frac{3}{4}\bigg(\Big(r^2\cos(2\varphi) + 1\Big)^2 - 1\bigg) \\
&\geq \frac{14}{8} - \frac{3}{4} = 1.
\end{aligned}$$

[1]Durch $(x,y)$ ausdrückt würde die Lösung lauten:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}r^2\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}r^4\cos(4\varphi) \\
&= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}\big(r^2\cos^2(\varphi) - r^2\sin^2(\varphi)\big) + \frac{3}{8}r^4\big(\cos^2(2\varphi) - \sin^2(2\varphi)\big) \\
&= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + \frac{3}{8}r^4\bigg(\Big(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\Big)^2 - 4\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)\bigg) \\
&= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + \frac{3}{8}\big((x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2\big)
\end{aligned}$$

**12.3. Harmonische Funktionen (Prüfung Februar 2016)**
Siehe das Lösungsblatt der Prüfung von Februar 2016

`https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0373-00L/vergangene-prufungen/ExamSolution`
`2016-02.pdf`