13.1. Laplace-Gleichung auf dem Kreis I

(a) Zuerst betrachten wir das Problem in Polarkoordinaten. Daraus folgt

$$\begin{cases} \Delta u(r,\phi) = r^4 & (r,\phi) \in [0,1) \times [-\pi,\pi) \\ u(1,\phi) = 0 & \phi \in [-\pi,\pi). \end{cases}$$

Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}.$$

Wir wissen, dass das Problem eine eindeutige Lösung hat. Weil r^4 nicht von ϕ abhängt, versuchen wir den Ansatz $u(r,\phi) = u(r)$, um diese eindeutige Lösung zu finden. Das Problem wird dann

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = r^4 & (r,\phi) \in [0,1) \times [-\pi,\pi) \\ u(1,\phi) = 0 & \phi \in [-\pi,\pi). \end{cases}$$

Wir bemerken, dass

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = r^4 \quad \Rightarrow \quad ru_{rr} + u_r = r^5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ru_r) = r^5,$$

also

$$ru_r = \frac{r^6}{6} + C \quad \Rightarrow \quad u_r = \frac{r^5}{6} + \frac{C}{r} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{r^6}{36} + C\log r + D.$$

Die Randbedingung liefert

$$u(1) = \frac{1}{36} + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{36}.$$

Da die Lösung differenzierbar sein soll, muss insbesondere $\lim_{r\to 0} u(r)$ ein begrenzter Wert sein: Das ist möglich, nur wenn $C = 0$. Daraus schliessen wir, dass die Lösung die Form

$$u(r) = \frac{r^6}{36} - \frac{1}{36}, \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^3}{36} - \frac{1}{36}$$

hat.

(b) Wie aus der Vorlesung bekannt, falls wir die Randwerte $u(1,\phi)$ als Fourierreihe schreiben können:

$$u(1,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)$$

dann ist die Lösung gegeben durch

$$u(r,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)).$$

In unserem Fall, sehen wir, dass mithilfe trigonometrischer Formeln

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \tag{1}$$

in Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} u(1,\phi) = y + x^2 &= \sin(\phi) + (\cos(\phi))^2 \\ &= \sin(\phi) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\phi), \end{aligned}$$

daraus schliessen wir, dass die Lösung des Problems (in Polarkoordinaten)

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + \frac{r^2}{2}\cos(2\phi)$$

ist. Um die Lösung in kartesischen Koordinaten zu schreiben, benutzen wir einmal mehr Formel (1):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + \frac{r^2}{2}\cos(2\phi) \\ &= \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + \frac{r^2}{2}(2\cos^2(\phi) - 1) \\ &= \frac{1}{2} + r\sin(\phi) + (r\cos(\phi))^2 - \frac{r^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + y + x^2 - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{1}{2} + y + \frac{x^2-y^2}{2}. \end{aligned}$$

(c) Wie in der Vorlesung gezeigt, hat die Lösung in Polarkoordinaten die Form

$$u(r,\phi) = a_0 + \sum_{n\geq 1} r^n \left[a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)\right],$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos(n\phi)d\phi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin(n\phi)d\phi. \end{aligned}$$

Mithilfe der trigonometrischen Identität

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos(3\alpha)}{4}$$

sehen wir, dass

$$f(\phi) = 4\cos^3(\phi) - 3\cos(\phi) = \cos(3\phi).$$

Deshalb verschwinden alle Koeffizienten ausser $a_3 = 1$. Mithilfe der trigonometrischen Identität

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha),$$

erhalten wir die Lösung

$$u(r,\phi) = r^3\cos(3\phi) = r^3(\cos^3(\phi) - 3\sin^2(\phi)\cos(\phi))$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2\,.$$

13.2. Laplace-Gelichung auf dem Kreis II

(a) Gemäss dem Maximumprinzip werden Maximum und Minimum von u auf $\overline{B_1(0)}$ in $\partial B_1(0)$ angenommen. Für $(x,y) \in \partial B_1(0)$ gilt aber

$$u(x,y) = 1 + 3x^4 \leq 1 + 3\cdot 1 = 4$$

wegen $|x| \leq 1$ auf $\partial B_1(0)$ und

$$u(x,y) = 1 + 3x^4 \geq 1$$

wegen der Nichtnegativität der vierten Potenz auf $\mathbb{R}$.

Alternativ: Mit der Poissonschen Darstellungsformel erhält man:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} u(1,\theta)\ d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} (1+3\cos^4(\theta))\ d\theta. \end{aligned}$$

Da die harmonische Fortsetzung der konstanten Funktion 1 auf $\partial B(0,1)$ nach $B(0,1)$ die konstante Funktion 1 ist, gilt für alle $r \in [0,1)$, $\varphi \in [0,2\pi]$:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\ d\theta.$$

Ausserdem ist für alle $r \in [0,1)$ und alle $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} \geq 0. \tag{2}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}(1+3\cos^4(\theta))\ d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\ d\theta = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}(1+3\cos^4(\theta))\ d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\cdot 4\ d\theta = 4. \end{aligned}$$

(Im Prinzip ist diese Lösung keine essentiell andere als diejenige oben. Implizit wurde das Maximumprinzip bewiesen. Es manifestiert sich in der Positivität des Poisson-Kerns, vgl. (2).)

(b) Gemäss der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen (was nichts anderes ist als, dass der Poissonkern für $r = 0$ die konstante Funktion $\frac{1}{2\pi}$ ist) gilt:

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\cos(\varphi),\sin(\varphi))\ d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(1+3\cos^4(\varphi)\Big)\ d\varphi \\ &= 1 + \frac{3}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^4(\varphi)\ d\varphi}_{=:I}. \end{aligned}$$

Das Integral I berechnen wir gesondert:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\cos^4(x)\ dx = \underbrace{\sin(x)\cos^3(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi}\sin(x)3\cos^2(x)(-\sin(x))\ dx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2x)\ dx = \frac{3}{8}\int_0^{4\pi}\sin^2(y)\ dy = \frac{3}{8}\cdot\frac{4\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass bekannt ist, dass $\sin^2(x)$ (sowie $\cos^2(x)$), wenn über eine volle Periode integriert, immer die Hälfte der Periode als Integralwert liefert. Somit ergibt sich in der oben unterbrochenen Berechnung von $u(0,0)$:

$$u(0,0) = 1 + \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{17}{8}.$$

(c) Schließlich bestimmen wir die Funktion u mit Hilfe von Fourierreihen. Wir wissen aus der Vorlesung, dass wenn

$$u(1,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)\Big),$$

dann

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\Big(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)\Big).$$

Es gilt nun (vgl. mit der Vorlesung)

$$\cos^4(\theta) = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{\cos(4\varphi)}{8}$$

und damit:

$$1 + 3\cos^4(\varphi) = 1 + 3\Big(\frac{3}{8} + \frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{\cos(4\varphi)}{8}\Big) = \frac{17}{8} + \frac{3}{2}\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}\cos(4\varphi).$$

Damit haben wir bereits die Fourierreihe von $u(1,\cdot)$ und es folgt[1]

$$u(r,\varphi) = \frac{17}{8} + r^2\frac{3}{2}\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}r^4\cos(4\varphi).$$

Durch eine Probe verifiziert man, dass u das Randwertproblem löst.

Aus der obigen Formel ergibt sich, da $0 \leq r < 1$ und $-1 \leq \cos(2\varphi) \leq 1$ und $-1 \leq \cos(4\varphi) \leq 1$, für alle $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$u(r,\varphi) \leq \frac{17}{8} + \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = 4.$$

[1]Durch (x, y) ausdrückt würde die Lösung lauten:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}r^2\cos(2\varphi) + \frac{3}{8}r^4\cos(4\varphi)\\
&= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}(r^2\cos^2(\varphi) - r^2\sin^2(\varphi)) + \frac{3}{8}r^4\big(\cos^2(2\varphi) - \sin^2(2\varphi)\big)\\
&= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + \frac{3}{8}r^4\Big(\big(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\big)^2 - 4\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)\Big)\\
&= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + \frac{3}{8}\big((x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2\big)
\end{aligned}$$

Für die untere Abschätzung nehmen wir noch eine Umformung vor:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{17}{8} + \frac{3}{2} r^2 \cos(2\varphi) + \frac{3}{8} r^4 \cos(4\varphi) \\ &= \frac{17}{8} + \frac{3}{2} r^2 \cos(2\varphi) + \frac{3}{8} r^4 \Big(2\cos^2(2\varphi) - 1\Big) \\ &= \frac{14}{8} + \frac{3}{2} r^2 \cos(2\varphi) + \frac{3}{4} \Big(r^2 \cos(2\varphi)\Big)^2 \\ &= \frac{14}{8} + \frac{3}{4} \left(\Big(r^2 \cos(2\varphi) + 1\Big)^2 - 1\right) \\ &\geq \frac{14}{8} - \frac{3}{4} = 1. \end{aligned}$$

13.3. Abhängigkeitsgebiet und Einflussgebiet

Ähnlich mit Aufgabe 2, Serie 4.

13.4. Fourier-Reihe

Sei F die 2π-periodische ungerade Fortsetzung von f. Durch die Fourier-Reihe Formel von ungerade Funktionen, gilt dass die reelle Fourier-Reihe von F ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

wobei

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Somit haben wir

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} e^x \sin(nx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\pi - x} \sin(nx) dx \right).$$

Wir berechnen jedes Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^x \sin(nx) dx &= e^x \sin(nx)\big|_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} e^x \cos(nx) dx \\ &= e^{\pi/2} \sin(n\pi/2) - n e^x \cos(nx)\big|_0^{\pi/2} - n^2 \int_0^{\pi/2} e^x \sin(nx) dx \\ &= e^{\pi/2} \sin(n\pi/2) - n e^{\pi/2} \cos(n\pi/2) + n - n^2 \int_0^{\pi/2} e^x \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin(nx) dx = \frac{1}{1+n^2} \Big(e^{\pi/2} \sin(n\pi/2) - n e^{\pi/2} \cos(n\pi/2) + n \Big).$$

Die zweite Integral ist:

$$\begin{aligned} e^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-x}\sin(nx)dx &= e^{\pi}\left(-e^{-x}\sin(nx)|_{\pi/2}^{\pi} + n\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-x}\cos(nx)dx\right) \\ &= e^{\pi}\left(e^{-\pi/2}\sin(n\pi/2) - ne^{-x}\cos(nx)|_{\pi/2}^{\pi} - n^2\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-x}\sin(nx)dx\right) \\ &= e^{\pi}\Big(e^{-\pi/2}\sin(n\pi/2) - ne^{-\pi}(-1)^n + \\ &\quad +ne^{-\pi/2}\cos(n\pi/2) - n^2\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-x}\sin(nx)dx\Big) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\pi-x}\sin(nx)dx = \frac{1}{1+n^2}\left(e^{\pi/2}\sin(n\pi/2) + ne^{\pi/2}\cos(n\pi/2) - n(-1)^n\right).$$

Dann können wir berechnen die Koefficient b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi(1+n^2)}\left(2e^{\pi/2}\sin(n\pi/2) + n(1-(-1)^n)\right).$$

Wenn $n = 2k$ ist, gilt $b_n = 0$. Für $n = 2k+1$, haben wir

$$b_{2k+1} = \frac{4}{\pi(1+(2k+1)^2)}\left(e^{\pi/2}(-1)^k + (2k+1)\right).$$

Somit ist die reelle Fourier-Reihe von f:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1+(2k+1)^2)}\left(e^{\pi/2}(-1)^k + (2k+1)\right)\sin((2k+1)x).$$

Bemerkung Sie dass F stetig nicht ist. Dann $F(0) = 1 \neq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\cdot 0) = 0$.

13.5. Wärmeleitungsgleichung

Wir sehen, dass $u(x,0)$ ein *endliches* trigonometrisches Polynom ist, das nur Sinus Funktionen enthält. Daher können wir ohne zu Zögern den Separationsansatz anwenden: das bedeutet, dass die Lösung unseres Problems von der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{M} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

ist wobei, in unserem Fall, $L = \pi$, $M = 6$, $k = 5$ ($k^2 = 25$) und die Koeffizienten a_n sind: $a_2 = 1$, $a_6 = 7$ und $a_n = 0$ für alle $n \neq 2, 6$. Genauer gesagt, erhalten wir die Formel

$$u(x,t) = \sin(2x)\mathrm{e}^{-20t} + 7\sin(6x)\mathrm{e}^{-180t}.$$

13.6. Fourier Transformation (Prüfung Februar 2012)

Sehen Sie Aufgabe 2 von:

`https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-0373-00L/vergangene-prufungen/ExamSolution` `2012-02.pdf`