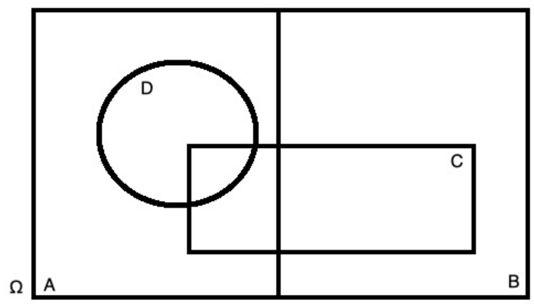
ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik
Serie 1

1. **a)** Stelle die folgenden Ereignisse im angegebenen Venn-Diagramm dar:

i) $(C \cup D)^c$
ii) $(A \setminus D) \cap C^c$
iii) $(C \cap D) \cup (A^c \setminus C)$



b) Benutze die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S.6 im Buch) um die folgenden Rechenregeln ((1.2), (1.4) und (1.5) im Buch) zu zeigen: Seien A und B zwei Ereignisse mit $B \subset A$. Dann gilt

i) $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
ii) $P(B) \leq P(A)$.
iii) Für beliebige Eregnisse C und D gilt:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

Tipp: Für i) schreibe $A = B \cup (A \setminus B)$ und beachte, dass B und $A \setminus B$ disjunkt sind. Für iii) überlege wie $C \cup D$ als disjunkte Vereinigung geschrieben werden kann und verwende $D = (C \cap D) \cup (D \setminus C)$).

2. Wir werfen gleichzeitig einen roten und einen grünen Würfel und betrachten die folgenden Ereignisse:

W_1 = „Keine der beiden gewürfelten Zahlen ist grösser als 2.“
W_2 = „Der rote Würfel zeigt dieselbe Zahl wie der grüne Würfel.“
W_3 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist das Doppelte der Zahl auf dem grünen

Bitte wenden!

Würfel.“
W_4 = „Die Zahl auf dem roten Würfel ist um eins grösser oder kleiner als die Zahl auf dem grünen Würfel.“

a) Wähle den Grundraum $\Omega := \{(r,g) : r,g \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$. Identifiziere die obigen Ereignisse mit Teilmengen von Ω.

b) Beschreibe in Worten die Ereignisse $W_1 \cup W_2$, $W_3 \cap W_4$ und $W_1^c \cap W_3^c$.

c) Von welchen der obigen Ereignisse kann man entscheiden, ob sie eintreten, wenn man die Würfel zwar beobachtet, aber farbenblind ist, so dass man rot und grün nicht unterscheiden kann?

Tipp: Der Grundraum kann verstanden werden als die Menge aller Paare der Zahlen von 1 bis 6, wobei die erste Komponente r für die Augenzahl des roten Würfels, die zweite Komponente g für die des Grünen steht.

3. Es seien $0 \leq j < k \leq n$ drei ganze Zahlen. Über einen Nachrichtenkanal werden n Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen als Wahrscheinlichkeitsraum Ω die Menge der 0-1 Folgen der Länge n gemäss

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\forall 1 \leq i \leq n : \, x_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n,$$

wobei $x_i = 1$ soviel bedeutet wie “i-tes Signal richtig übertragen” und $x_i = 0$ “i-tes Signal falsch übertragen”.
Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

- A : “Genau j Signale werden richtig übertragen”
- B : “Mindestens k Signale werden richtig übertragen”
- C : “Höchstens k Signale werden richtig übertragen”.

a) Schreibe die Ereignisse A, B und C als Teilmengen von Ω auf.

b) Beschreibe in Worten die Ereignisse $B \cap C$, $A \cap B$, $A \cap C$, A^c und C^c.

4. Wir spielen das Brettspiel „Siedler von Catan“. Das Spielbrett besteht aus Landschaften, die mit ganzen Zahlen zwischen 2 und 6 bzw. 8 und 12 versehen sind. In jeder Runde wird mit zwei Würfeln gewürfelt und diejenige Landschaften bringen Erträge, deren Zahl mit der Summe der Augenzahlen übereinstimmt.

a) Benutze den Grundraum Ω aus Aufgabe 2 (siehe Tipp). Identifiziere das Ereignis „die 9er Landschaften bringen Erträge“ mit einer Teilmenge von Ω.

b) Die Landschaften mit welcher Augenzahl bringen voraussichtlich am häufigsten bzw. am seltensten Ertrag? Warum?

c) Ein Spieler hat die Wahl: Entweder erhält er in der Zukunft den Ertrag einer 8er Landschaft oder all die Erträge von einer 12er und einer 4er Landschaft. Was soll er wählen und warum? (Wir nehmen an, dass die Charakteristik der Landschaft i.e. die Sorte der „Rohstoffen" bei der Entscheidung keine Rolle spielt.)

Tipp: Die Würfel sind zwar nicht unterschiedlich gefärbt, gedanklich müssen sie trotzdem unterscheidet werden. Gäbe es einen roten und einen grünen Würfel, wäre die Wahrscheinlichkeit einer 9 als Summe der Augenzahlen zum Beispiel trotzdem das gleiche. Deswegen soll man den Grundraum aus Aufgabe 1 verwenden.

Abgabe: 30. September oder 01. Oktober.
Präsenz: Montag und Donnerstag, 12:00-13:00 Uhr im HG G 32.6.
Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0603-00L/`