

## Stochastik

### Serie 11

1. Diese Aufgabe behandelt verschiedene Themenbereiche aus dem gesamten bisherigen Vorlesungsmaterial. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig.

a) Es sei die diskrete Zufallsvariable  $X$  gegeben durch  $P(X = \frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$ ,  $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X = \frac{3}{2}) = \frac{1}{3}$ . Wie gross ist  $F_X(5/4)$ ?

1.  $\frac{1}{2}$ .
2.  $\frac{2}{3}$ .
3. 1.

b) Welche Aussage ist korrekt?

1.  $\text{Cov}(X + Y, X) = \text{Var}(X)$ .
2.  $\text{Cov}(X + Y, X) = \text{Var}(X) + \text{Cov}(X, Y)$ .
3.  $\text{Cov}(X + Y, X) = \text{Var}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y)$ .

c) Betrachte eine Reihe von unabhängigen Wiederholungen eines Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Welche ist die korrekte Verteilung für die Anzahl Wiederholungen, bis der erste Erfolg eintritt?

1.  $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ ,  $x \in \{1, 2, \dots\}$ .
2.  $p(x) = (1-p)p^{x-1}$ ,  $x \in \{1, 2, \dots\}$ .
3.  $p(x) = p(1-p)^{x-1}$ ,  $x \in \{1, 2, \dots\}$ .

d) Es seien  $A$  und  $B$  Ereignisse mit  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ . Wir nehmen an, dass  $P(A|B) > P(A)$ . Dann gilt:

1.  $P(B|A) > P(B)$ .
2.  $P(A|B) = P(B|A)$ .
3.  $P(A) = P(B)$ .

e) Es sei die Zufallsvariable  $X$  gegeben mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} c+x & -c \leq x \leq 0 \\ c-x & 0 \leq x \leq c \end{cases}$$

Bestimme die Konstante  $c$ .

**Bitte wenden!**

1.  $c = 2$ .
2.  $c = 1$ .
3.  $c = \frac{1}{2}$ .

f) Gegeben sind i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .  
 Definiere  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Wie gross ist der Erwartungswert von

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2?$$

1.  $\sigma^2$ .
2.  $\mu^2$ .
3.  $\frac{n-1}{n} \sigma^2$ .

g) Wenn das Signifikanzniveau  $\alpha$  eines Tests kleiner wird, dann

1. wird der Verwerfungsbereich für die Nullhypothese  $H_0$  grösser.
2. wird das Vertrauensintervall grösser.
3. wird der P-Wert grösser.

h) Gegeben sind  $n$  Beobachtungen  $x_1, \dots, x_n$  von Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ .  
 Wir nehmen an dass die  $X_i$  unabhängig und normalverteilt sind mit unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  und unbekannter Varianz  $\sigma^2$ . Welcher Test ist geeignet um die Nullhypothese  $H_0 : \mu = 5$  gegen die Alternative  $H_A : \mu \neq 5$  zu testen?

1. t-Test.
2. z-Test.
3. Binomialtest.

Es wird ein Test mit Nullhypothese  $H_0 : \mu = 0$  und der Alternative  $H_A : \mu \neq 0$  auf dem Signifikanzniveau  $\alpha$  geführt. Betrachte die Funktion  $g(\mu) = P(H_0 \text{ ablehnen} | \mu)$ . Die Funktion  $g$  gibt die Wahrscheinlichkeit an,  $H_0$  zu verwerfen, für verschiedene Werte des unbekanntem wahren Parameters  $\mu$ .

i) Wenn  $\mu = 0$  ist, dann gilt

1.  $g(\mu) > \alpha$ .
2.  $g(\mu) < 1 - \alpha$ .
3.  $g(\mu) \leq \alpha$ .

j) Wenn  $\mu \neq 0$ , dann ist welche Aussage falsch?

1.  $1 - g(\mu)$  ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.
2.  $1 - g(\mu)$  ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

**Siehe nächstes Blatt!**

3.  $g(\mu)$  ist die Macht eines Tests.

2. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig.

a) Sei die Funktion  $f$  explizit gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ c, & -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Für welchen Wert  $c$  stellt  $f$  eine Dichtefunktion dar?

1.  $\frac{1}{2}$ .
2.  $\frac{1}{6}$ .
3. 1.

b) Die diskreten Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind durch folgende gemeinsamen Verteilungen gegeben

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = -2) &= \frac{1}{8}, & P(X = 1, Y = 1) &= \frac{1}{4}, & P(X = 1, Y = 4) &= \frac{1}{8}, \\ P(X = 3, Y = -2) &= \frac{1}{8}, & P(X = 3, Y = 1) &= \frac{1}{8}, & P(X = 3, Y = 4) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wie gross sind die Erwartungswerte  $\mathbb{E}(X)$  und  $\mathbb{E}(Y)$ ?

1.  $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$  und  $\mathbb{E}(Y) = 2$ .
2.  $\mathbb{E}(X) = 1$  und  $\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{2}$ .
3.  $\mathbb{E}(X) = 2$  und  $\mathbb{E}(Y) = \frac{11}{8}$ .

c) Ist  $X$  eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern  $n$  und  $p$ , dann konvergiert die Verteilungsfunktion  $F_n(z)$  der standardisierten Zufallsvariablen

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Verteilungsfunktion der

1. Exponentialverteilung.
2. Standardnormalverteilung.
3. Poissonverteilung.

d) Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen mit Korrelation  $Corr(X, Y) = -1$ , Varianz  $Var(X) = 1$  und Standardabweichung  $\sqrt{Var(Y)} = 2$ . Wie gross ist dann  $Var(X + Y)$ ?

**Bitte wenden!**

1. 1.
2. 3.
3. 5.

e) Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  und sei  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann ist für  $\sigma^2$  der Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

1. erwartungstreu.
2. nicht erwartungstreu.
3. Es kann keine Aussage gemacht werden.

f) Beim Testen einer Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  wird bei gegebener Standardabweichung  $\sigma$  bei zweiseitiger Alternative  $H_A : \mu \neq \mu_0$  die Nullhypothese  $H_0$  abgelehnt, falls

1.  $|\bar{X}_n - \mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ ,
2.  $\bar{X}_n - \mu_0 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ ,
3.  $|\bar{X}_n - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ ,

wobei  $\Phi(\cdot)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

g) Welche Aussage gilt für einen Test zum Niveau  $\alpha$ ?

1. Je grösser das Niveau  $\alpha$ , desto eher behalten wir die Nullhypothese.
2. Je kleiner das Niveau  $\alpha$ , desto grösser die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.
3.  $\alpha$  ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.

h) Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_{\vartheta}(x) = \begin{cases} (\vartheta - 1)x^{-\vartheta}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\vartheta \in (0, \infty)$  ein unbekannter Parameter ist. Der Maximum Likelihoodschätzer für  $\vartheta$  lautet

1.  $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i)}$ .
2.  $1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(X_i)}$ .
3.  $\frac{n}{\vartheta-1} - \sum_{i=1}^n \log(X_i)$ .

i) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

**Siehe nächstes Blatt!**

1. Fehler 2. Art tritt auf, wenn die Nullhypothese  $H_0$  akzeptiert wird, obwohl die Alternativhypothese  $H_A$  gilt.
2. Fehler 2. Art tritt auf, wenn die Nullhypothese  $H_0$  abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist.
3. Weder 1. noch 2. gilt.

j) Welche der nachfolgenden Interpretationen für den  $p$ -Wert eines Tests stimmt?

1. Der  $p$ -Wert ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese  $H_0$  stimmt.
2. Der  $p$ -Wert ist eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art.
3. Weder 1. noch 2. sind richtig.

3. Der Fernsehsender SkiTV möchte ein Skirennen mit 81 Skifahrern live übertragen. Der  $i$ -te Skifahrer ( $i = 1, \dots, 81$ ) erreicht nach einer Zeit  $T_i$  (in Minuten) das Ziel. Sobald ein Skifahrer im Ziel ist, kann der nächste ohne Zeitverzögerung direkt starten.

Die Zufallsvariablen  $T_i$  seien iid mit Dichte  $f_T$ , wobei

$$f_T(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und  $\lambda = 3$ .

- a) Bestimme den Erwartungswert  $E[T_i]$  und die Varianz  $\text{Var}(T_i)$ .  
**Tipp:** Falls  $S \sim \text{Exp}(\lambda)$ , so ist  $E[S] = 1/\lambda$  und  $\text{Var}(S) = 1/\lambda^2$ .
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Skifahrer mehr als 70 Sekunden die Piste besetzt?
- c) Aufgrund langjähriger Erfahrung hat der TV-Sender genauere Informationen, nämlich dass die erwartete Dauer bis ein Skifahrer im Ziel ist  $\mu = 13/9$  beträgt, mit einer Varianz von  $\sigma^2 = 1/9$ . Da der TV-Sender das ganze Rennen live übertragen will, fragt er sich wie lange das Rennen dauern wird. Man möchte das Rennen mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.7% vollständig übertragen können. Wie viele Stunden/Minuten muss der Sender in seinem Sendeplan für das Skirennen reservieren? Benutze den zentralen Grenzwertsatz um dieses Problem zu lösen.

4. Die Firma Pharma AG vertreibt Schmerzmittel in Pulverform und Tablettenform. Bei der Einnahme des Pulvers klagen 40% der Patienten über Nebenwirkungen. Sie möchten nun testen: Wenn Tabletten statt Pulver eingenommen

**Bitte wenden!**

werden, ändert sich dann der Anteil der Patienten mit Nebenwirkungen signifikant?

Dazu werden zufällig 50 Patienten ausgewählt und es sei  $X$  die Anzahl Patienten unter diesen 50, welche bei der Einnahme von Tabletten *keine* Nebenwirkungen haben. Wir nehmen an, dass  $X \sim \text{Bin}(50, p)$ , wobei  $p$  die Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall ist ("Erfolg" = keine Nebenwirkungen).

- a) Obige Studie ergab das Folgende: Unter den 50 Patienten befanden sich 35, bei welchen durch die Tabletten keine Nebenwirkungen hervorgerufen wurden. Ist dies signifikant oder eher Zufall? Führen Sie dazu einen statistischen Test durch und gehen Sie dabei wie folgt vor:
  - i) Formulieren Sie ein geeignetes Modell.
  - ii) Formulieren Sie eine geeignete Null- und Alternativhypothese. Ist der Test ein- oder zweiseitig durchzuführen? Begründen Sie kurz!
  - iii) Formulieren Sie die Teststatistik und berechnen Sie den Verwerfungsbereich des Tests für ein Signifikanzniveau von 5%.
  - iv) Wie entscheidet der Test?
  
- b) Angenommen, der wahre Anteil der unter Nebenwirkungen leidenden Patienten bei der Einnahme der Tabletten sei 20%. Wie gross ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art?

**Abgabe:** 09. oder 10. Dezember.

**Präsenz:** Montag und Donnerstag, 12:00-13:00 Uhr im HG G 32.6.

**Homepage:** <https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-0603-00L/>